

Robotik I: Einführung in die Robotik

Übung 5: Bewegungsplanung

Christian Mandery, Tamim Asfour

Institut für Anthropomatik und Robotik

KIT-Fakultät für Informatik, Institut für Anthropomatik und Robotik (IAR)
Hochperformante Humanoide Technologien (H²T)



Hinweis: Letzte Vorlesung im Jahr fällt aus

- Die Vorlesung am

Donnerstag, den 21.12.2017

fällt aus.

- Die erste Vorlesung im neuen Jahr findet am

Montag, den 08.01.2018

statt.

Aufgaben zur Bewegungsplanung

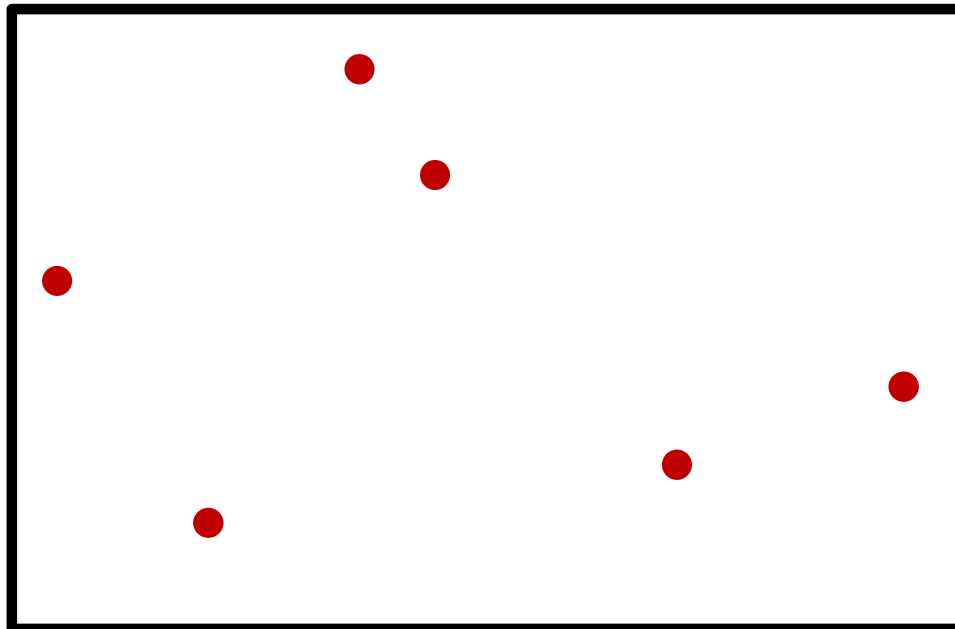
1. Voronoi-Diagramme
2. Linesweep-Verfahren
3. RRT*
4. A*
5. Potentialfelder

Aufgabe 1: Voronoi-Diagramme

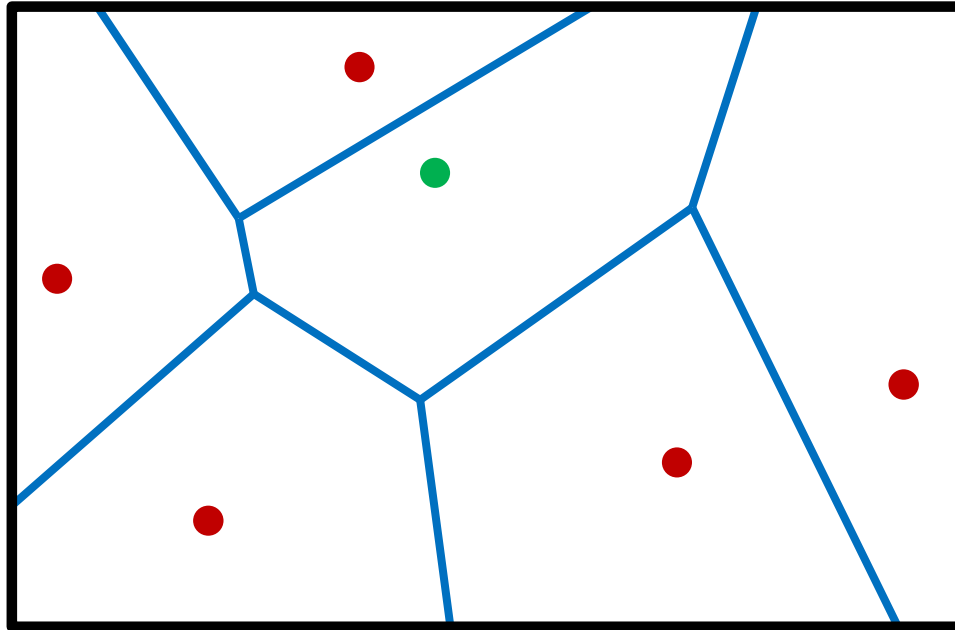
1. Erklären Sie die Begriffe

- Voronoi-Region
- Voronoi-Kante
- Voronoi-Knoten

2. Bestimmen Sie das Voronoi-Diagramm für P :

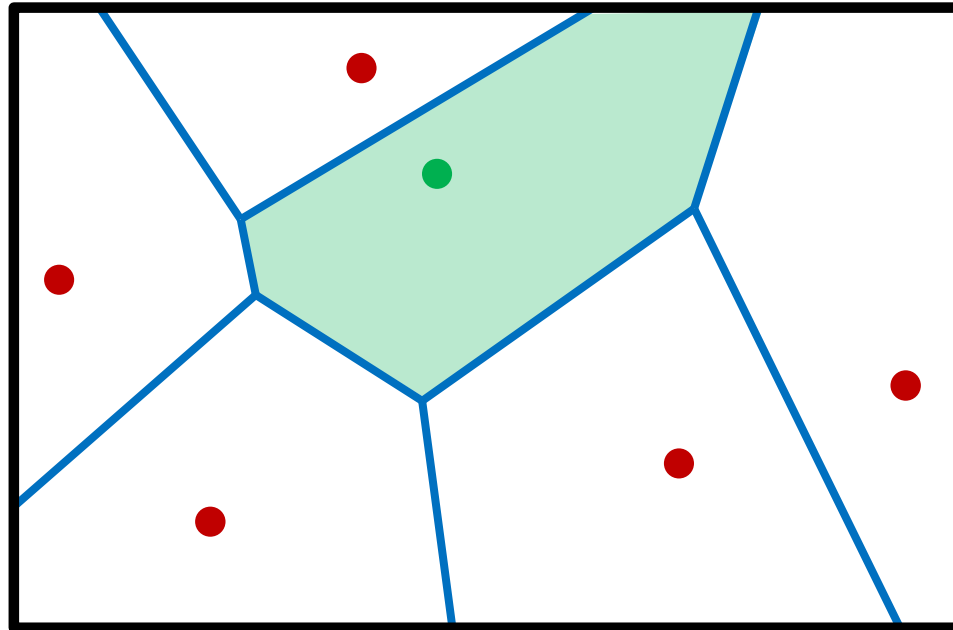


Aufgabe 1.1: Voronoi-Begriffe, Region



Region := Menge aller Punkte, deren Abstand zum Zentrum geringer ist als zu allen anderen Zentren

Aufgabe 1.1: Voronoi-Begriffe, Region

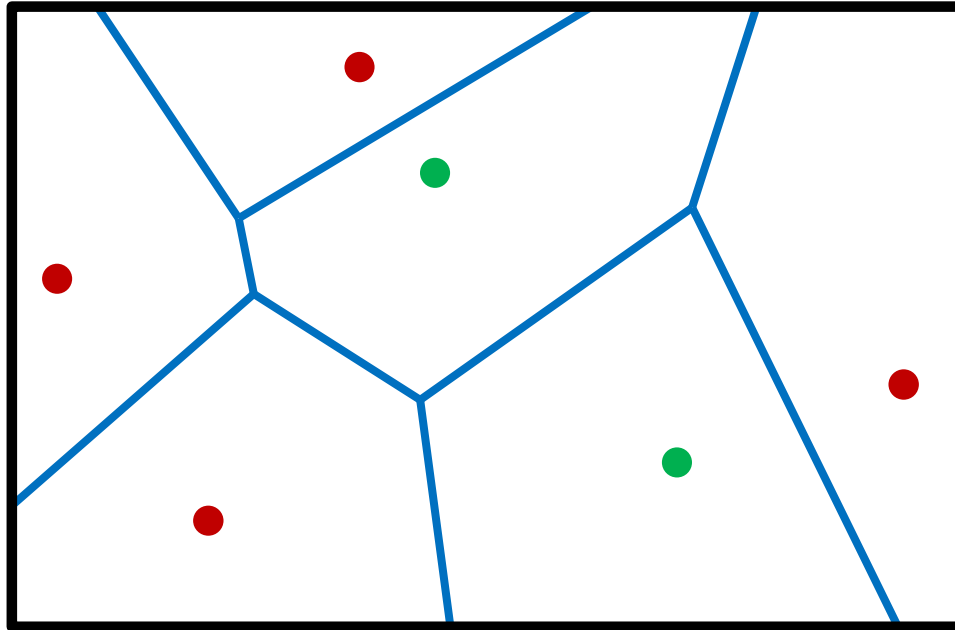


- Zentrum der Region
- Voronoi-Region
- Andere Zentren

■ Voronoi-Region:

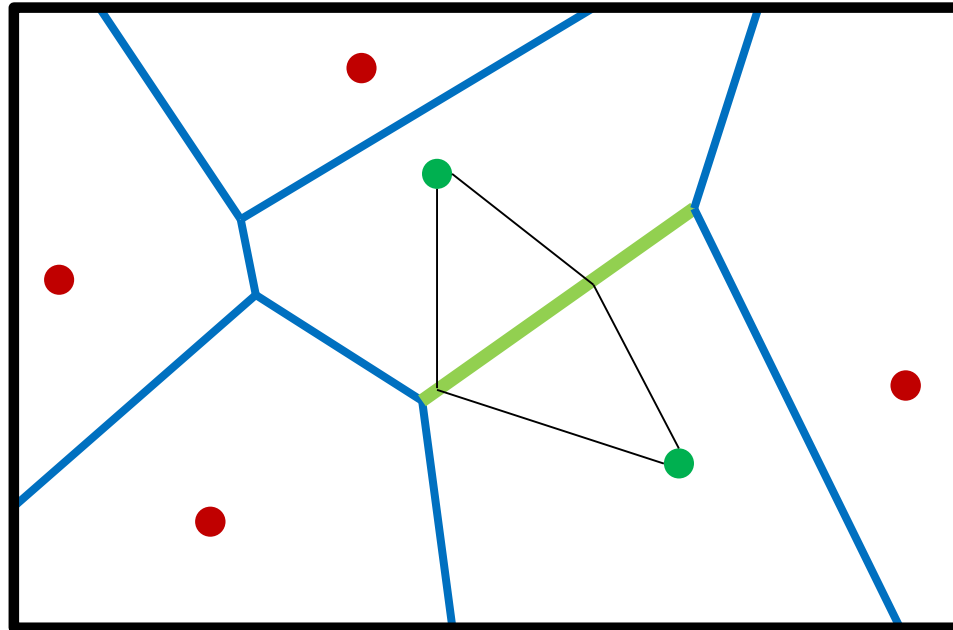
Eine **Region** ist definiert als die **Menge aller Punkte**, deren **Abstand** zum **Zentrum geringer** ist **als zu allen anderen Zentren**.

Aufgabe 1.1: Voronoi-Begriffe, Kante



Kante: Menge der Punkte auf der Grenze zwischen zwei Voronoi-Regionen (gleicher Abstand zum eigenen und benachbarten Zentrum)

Aufgabe 1.1: Voronoi-Begriffe, Kante

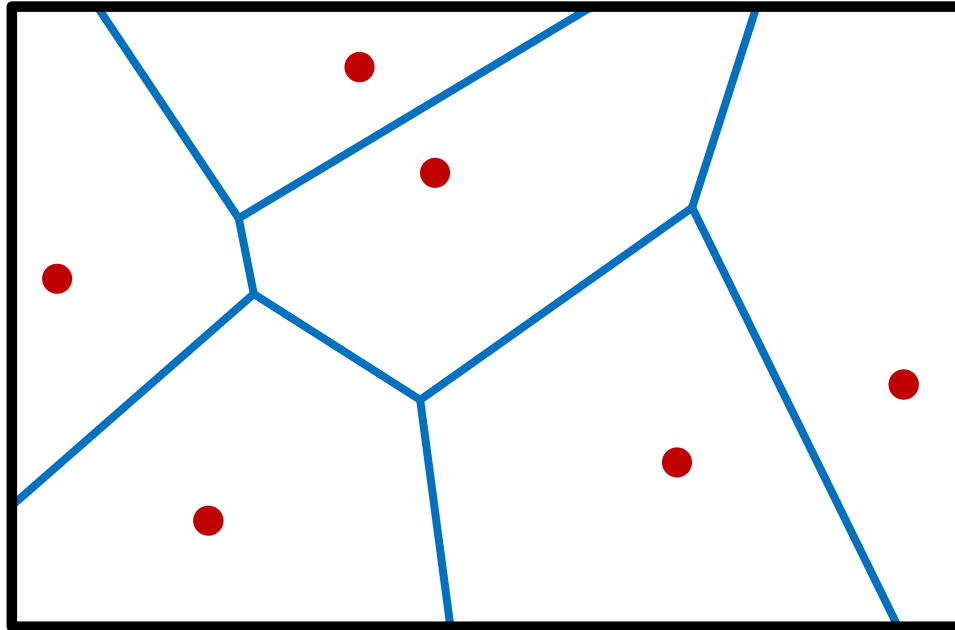


- Benachbarter Zentren
- Voronoi-Kante
- Andere Zentren

■ Voronoi-Kante:

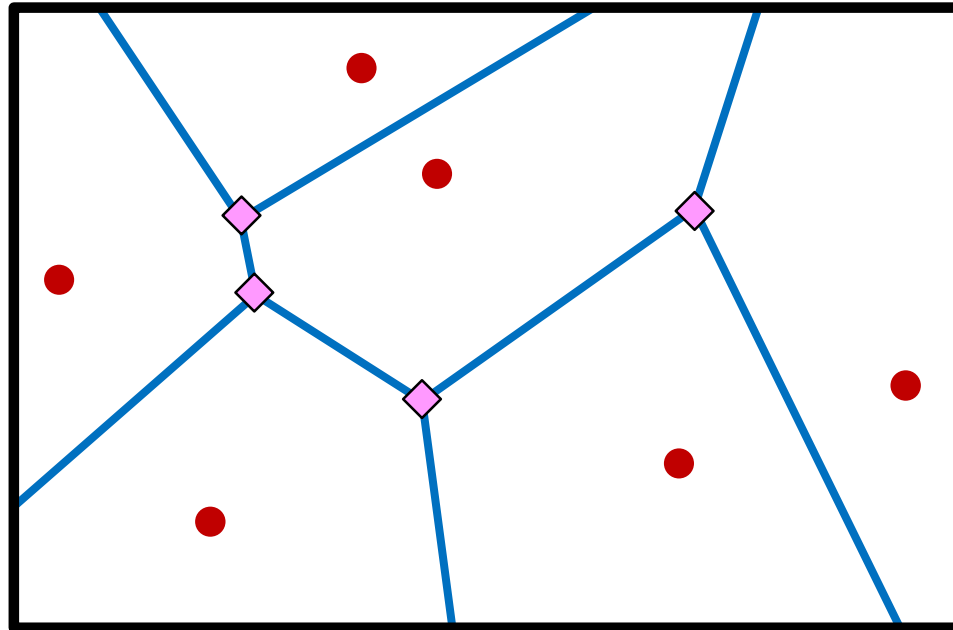
Alle **Punkte auf der Grenze** zwischen zwei Regionen besitzen den **gleichen Abstand** zum eigenen und zum **benachbarten Zentrum**.

Aufgabe 1.1: Voronoi-Begriffe, Knoten



Knoten: Ecken der Polygone bzw.
Voronoi-Regionen

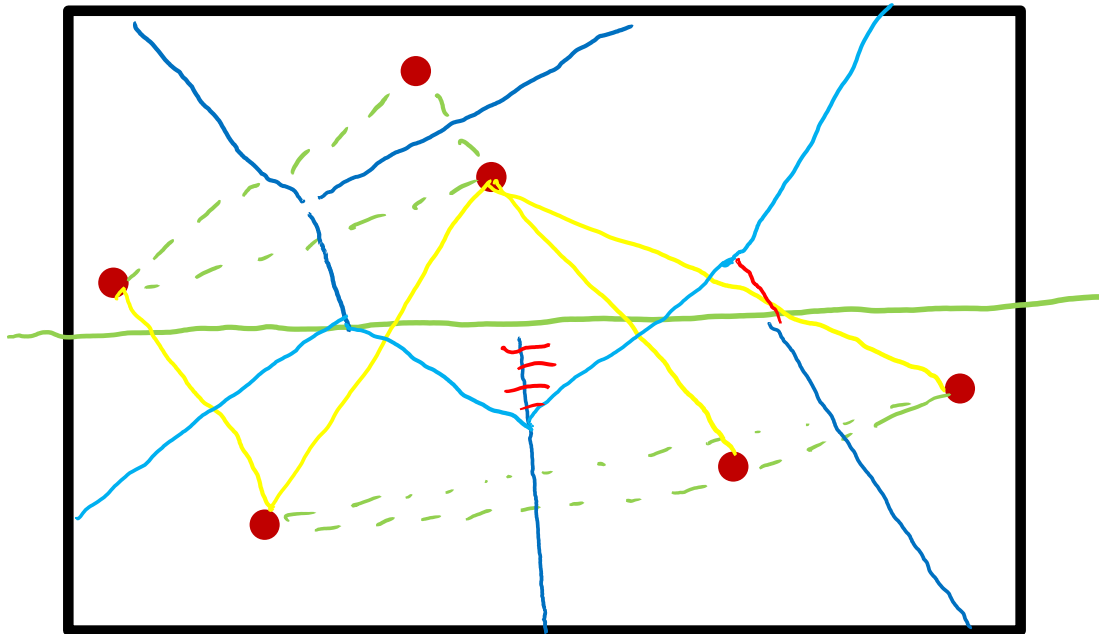
Aufgabe 1.1: Voronoi-Begriffe, Knoten



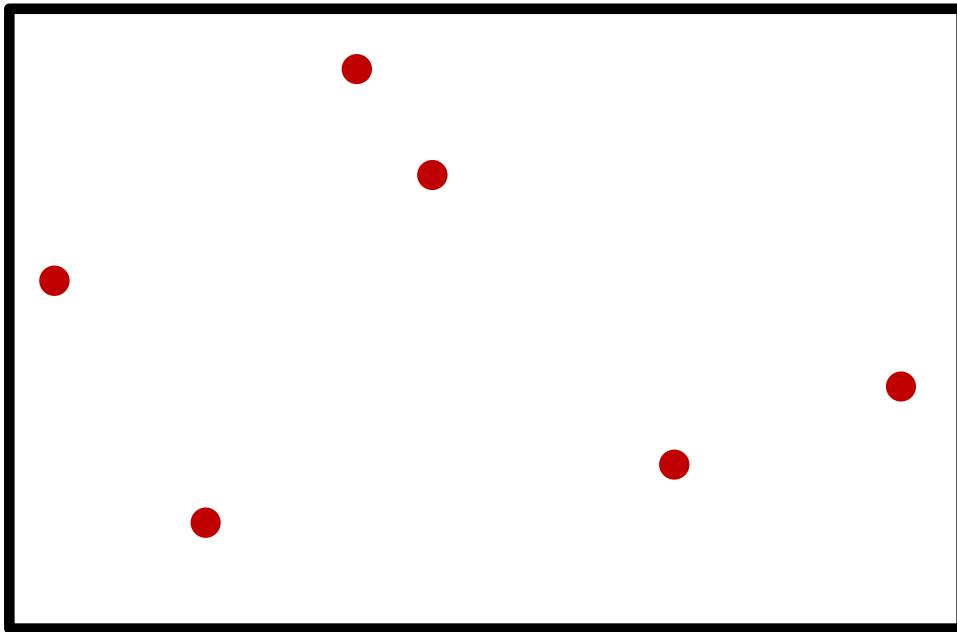
-  Voronoi-Knoten
-  Voronoi-Kanten
-  Zentren

- Voronoi-Knoten:
Ecken der Polygone bzw. Voronoi-Regionen

Aufgabe 1.2: Voronoi-Diagramm für P

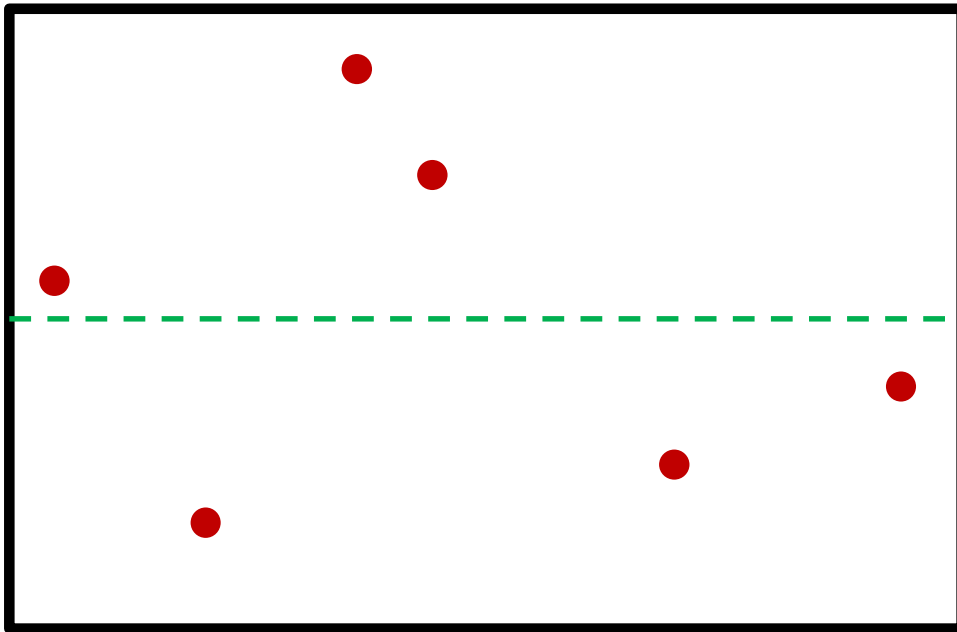


Aufgabe 1.2: Voronoi-Diagramm für P



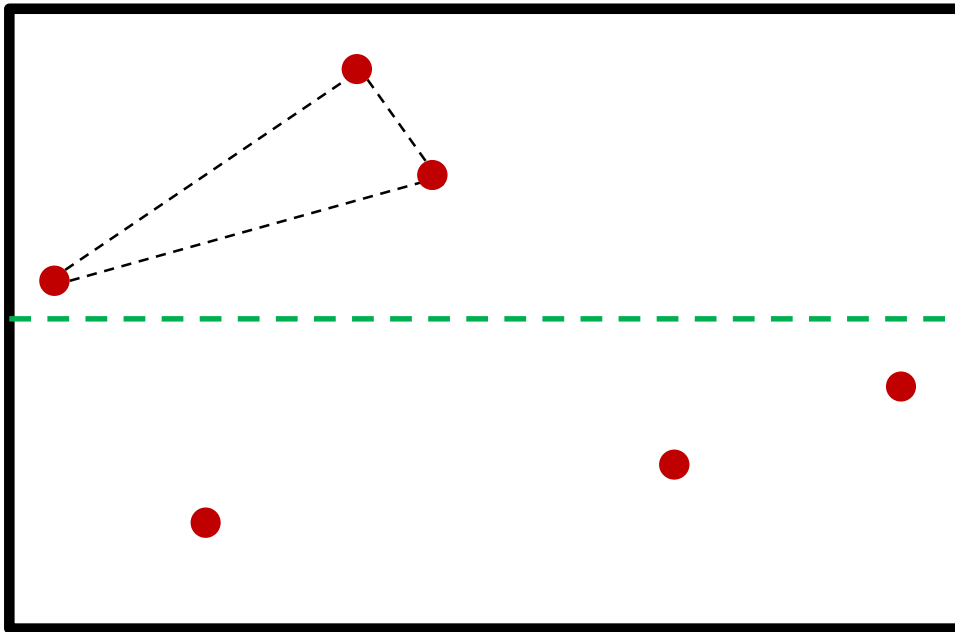
1. Rekursiv die Menge der Punkte halbieren (linear separierbar)

Aufgabe 1.2: Voronoi-Diagramm für P



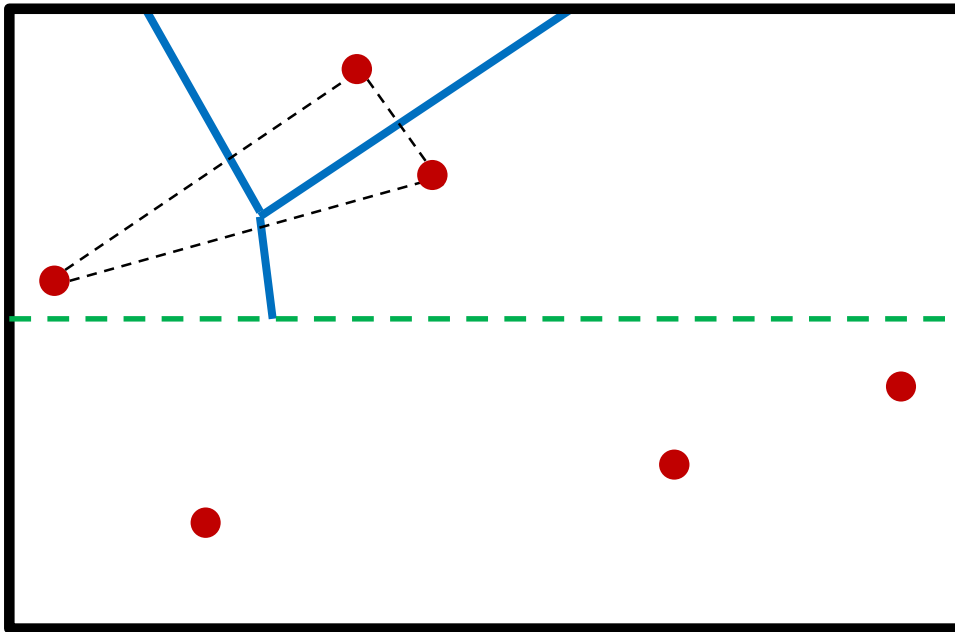
1. Rekursiv die Menge der Punkte halbieren (linear separierbar)
2. Basisfall lösen

Aufgabe 1.2: Voronoi-Diagramm für P



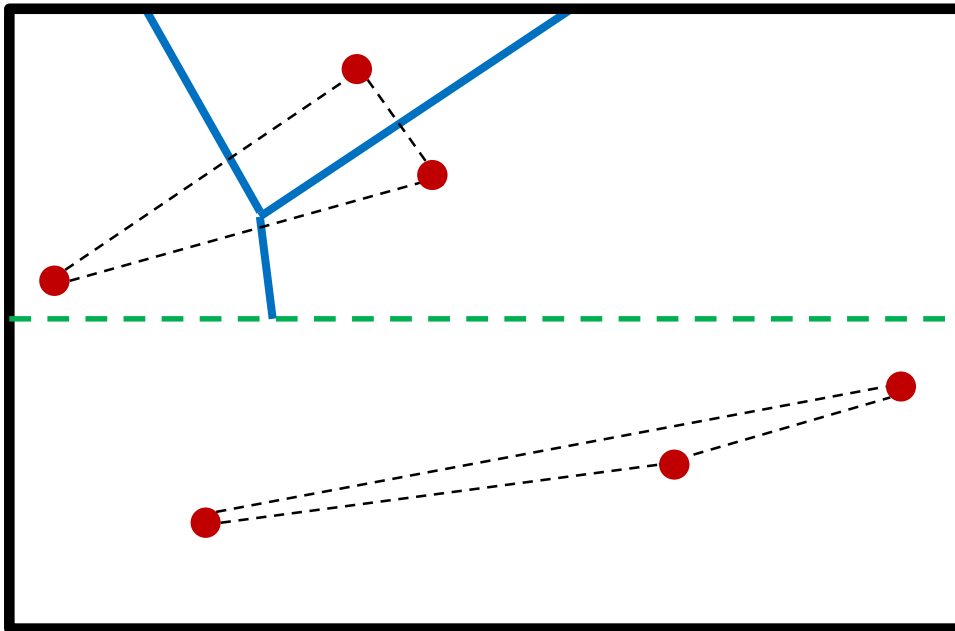
1. Rekursiv die Menge der Punkte halbieren (linear separierbar)
2. Basisfall lösen

Aufgabe 1.2: Voronoi-Diagramm für P



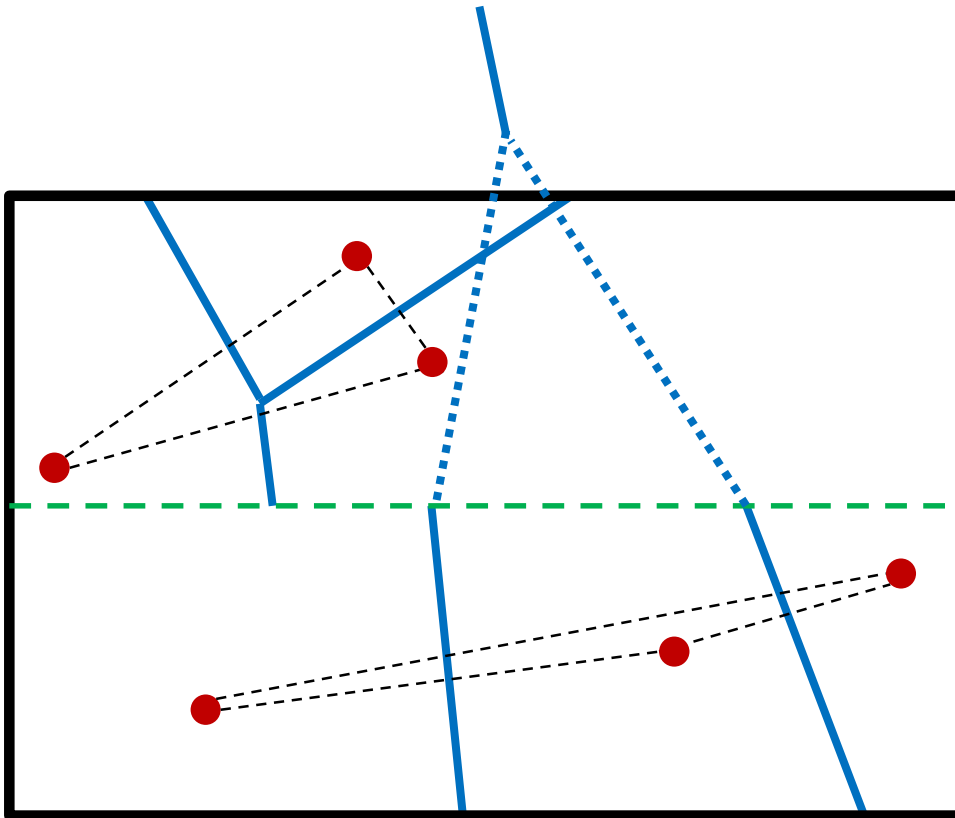
1. Rekursiv die Menge der Punkte halbieren
(linear separierbar)
2. Basisfall lösen
 - Mittelsenkrechten

Aufgabe 1.2: Voronoi-Diagramm für P



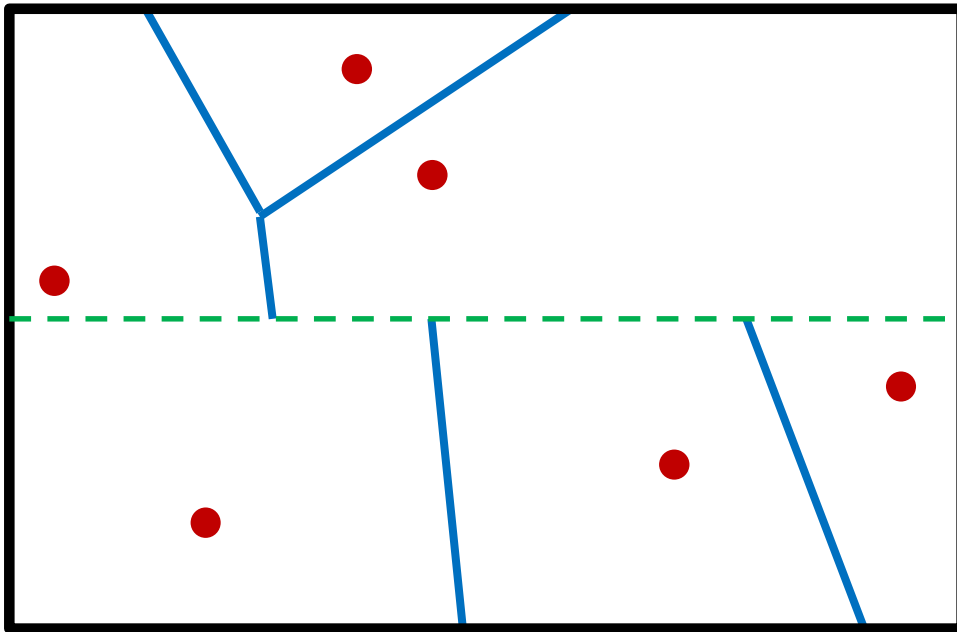
1. Rekursiv die Menge der Punkte halbieren
(linear separierbar)
2. Basisfall lösen
 - Mittelsenkrechten

Aufgabe 1.2: Voronoi-Diagramm für P



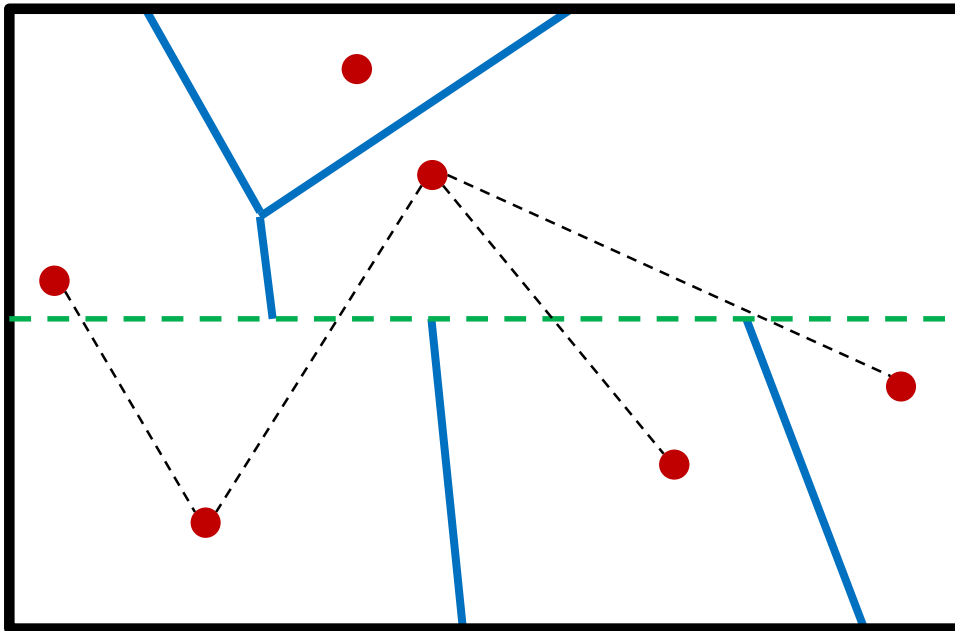
1. Rekursiv die Menge der Punkte halbieren
(linear separierbar)
2. Basisfall lösen
 - Mittelsenkrechten

Aufgabe 1.2: Voronoi-Diagramm für P



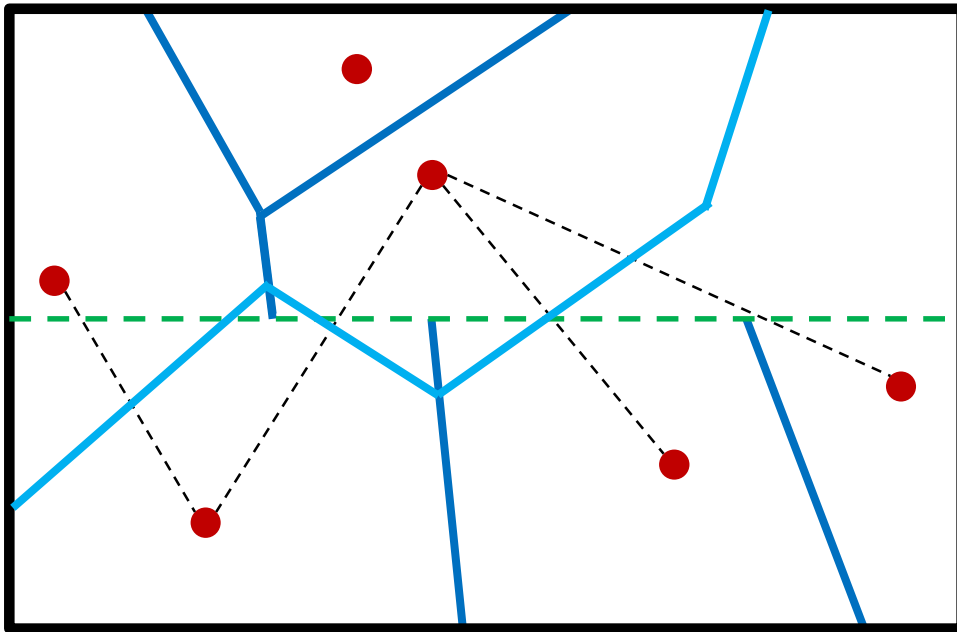
1. Rekursiv die Menge der Punkte halbieren
(linear separierbar)
2. Basisfall lösen
 - Mittelsenkrechten
3. Nachbarn verbinden

Aufgabe 1.2: Voronoi-Diagramm für P



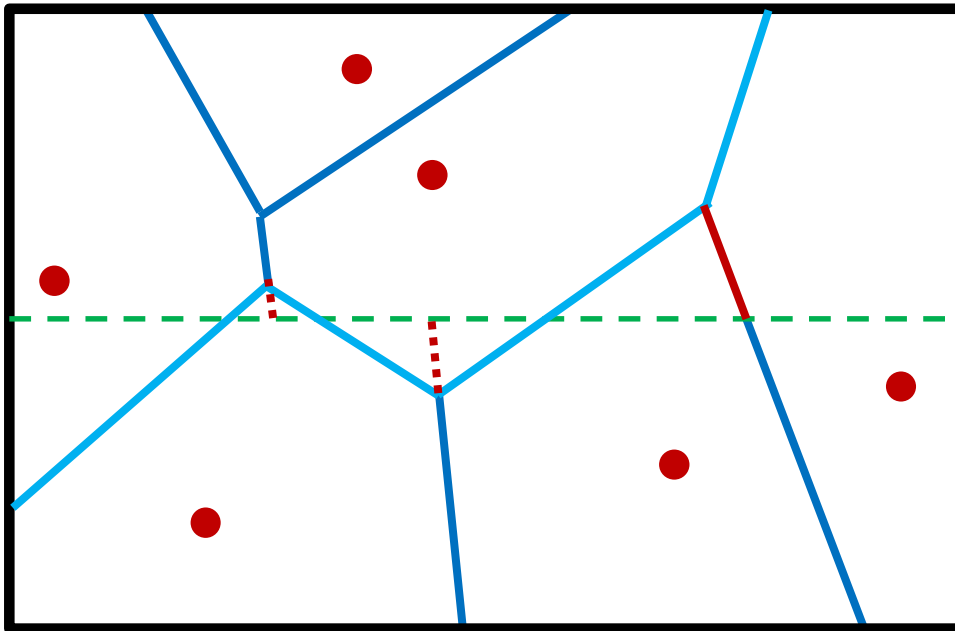
1. Rekursiv die Menge der Punkte halbieren (linear separierbar)
2. Basisfall lösen
 - Mittelsenkrechten
3. Nachbarn verbinden
 - Mittelsenkrechten

Aufgabe 1.2: Voronoi-Diagramm für P



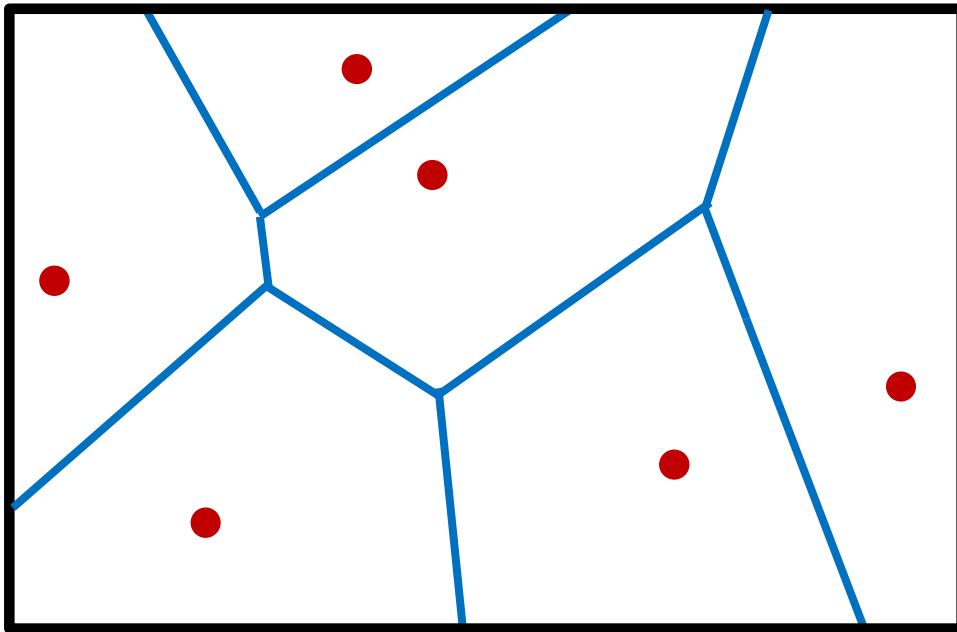
1. Rekursiv die Menge der Punkte halbieren
(linear separierbar)
2. Basisfall lösen
 - Mittelsenkrechten
3. Nachbarn verbinden
 - Mittelsenkrechten
4. Regionen abschließen
 - Linien kürzen bzw. verlängern

Aufgabe 1.2: Voronoi-Diagramm für P



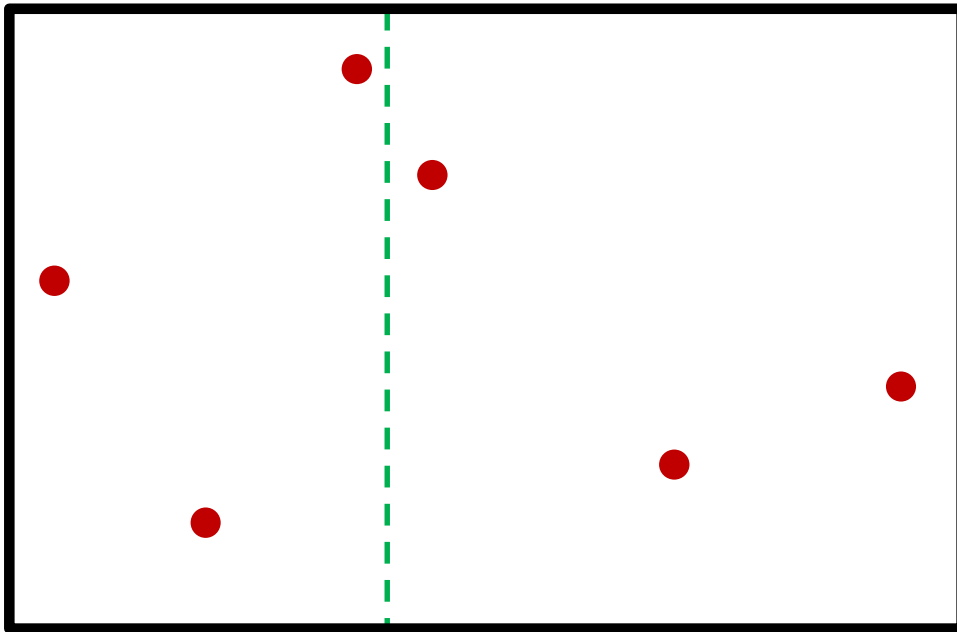
1. Rekursiv die Menge der Punkte halbieren
(linear separierbar)
2. Basisfall lösen
 - Mittelsenkrechten
3. Nachbarn verbinden
 - Mittelsenkrechten
4. Regionen abschließen
 - Linien kürzen bzw. verlängern

Aufgabe 1.2: Voronoi-Diagramm für P



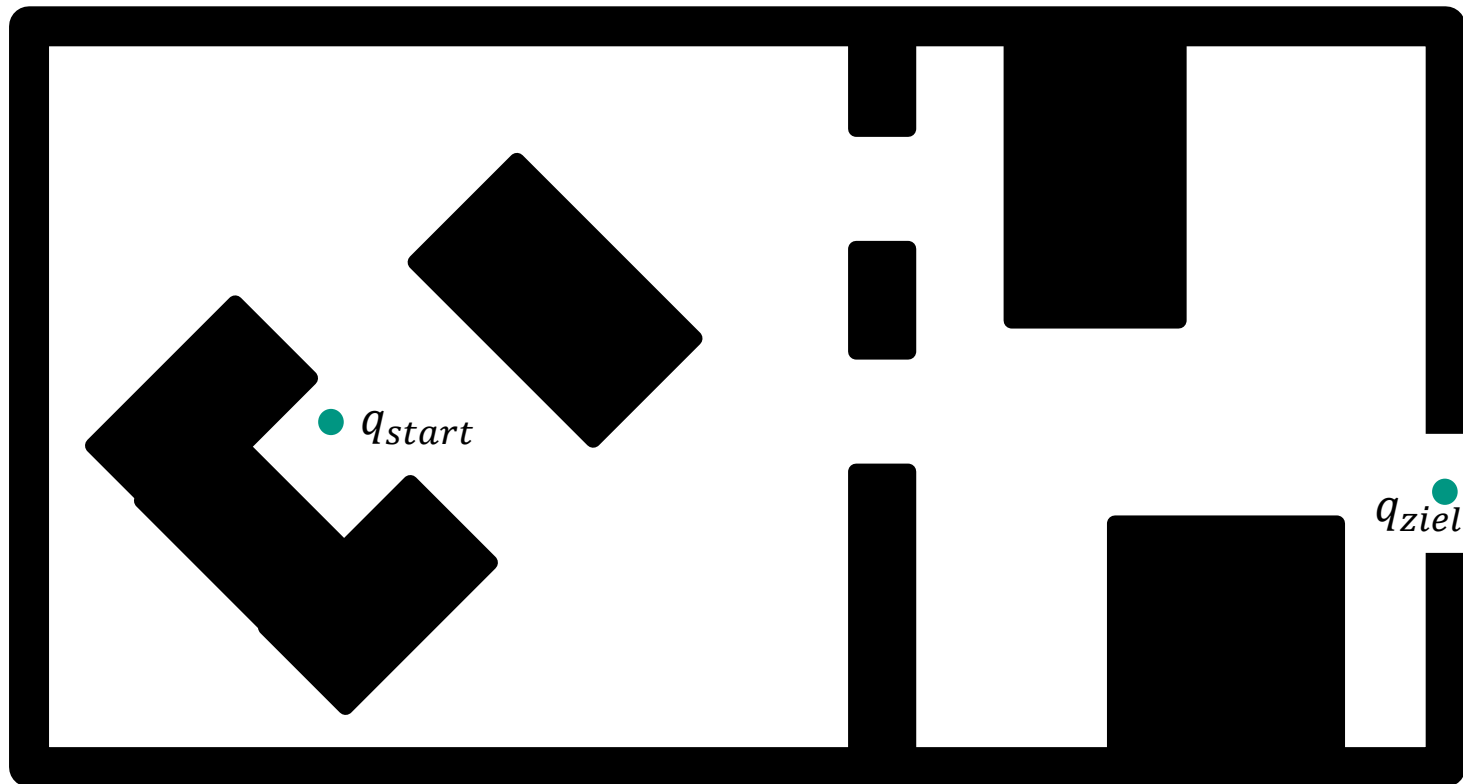
1. Rekursiv die Menge der Punkte halbieren
(linear separierbar)
2. Basisfall lösen
 - Mittelsenkrechten
3. Nachbarn verbinden
 - Mittelsenkrechten
4. Regionen abschließen
 - Linien kürzen bzw. verlängern

Aufgabe 1: Voronoi-Diagramm für P , Bonus



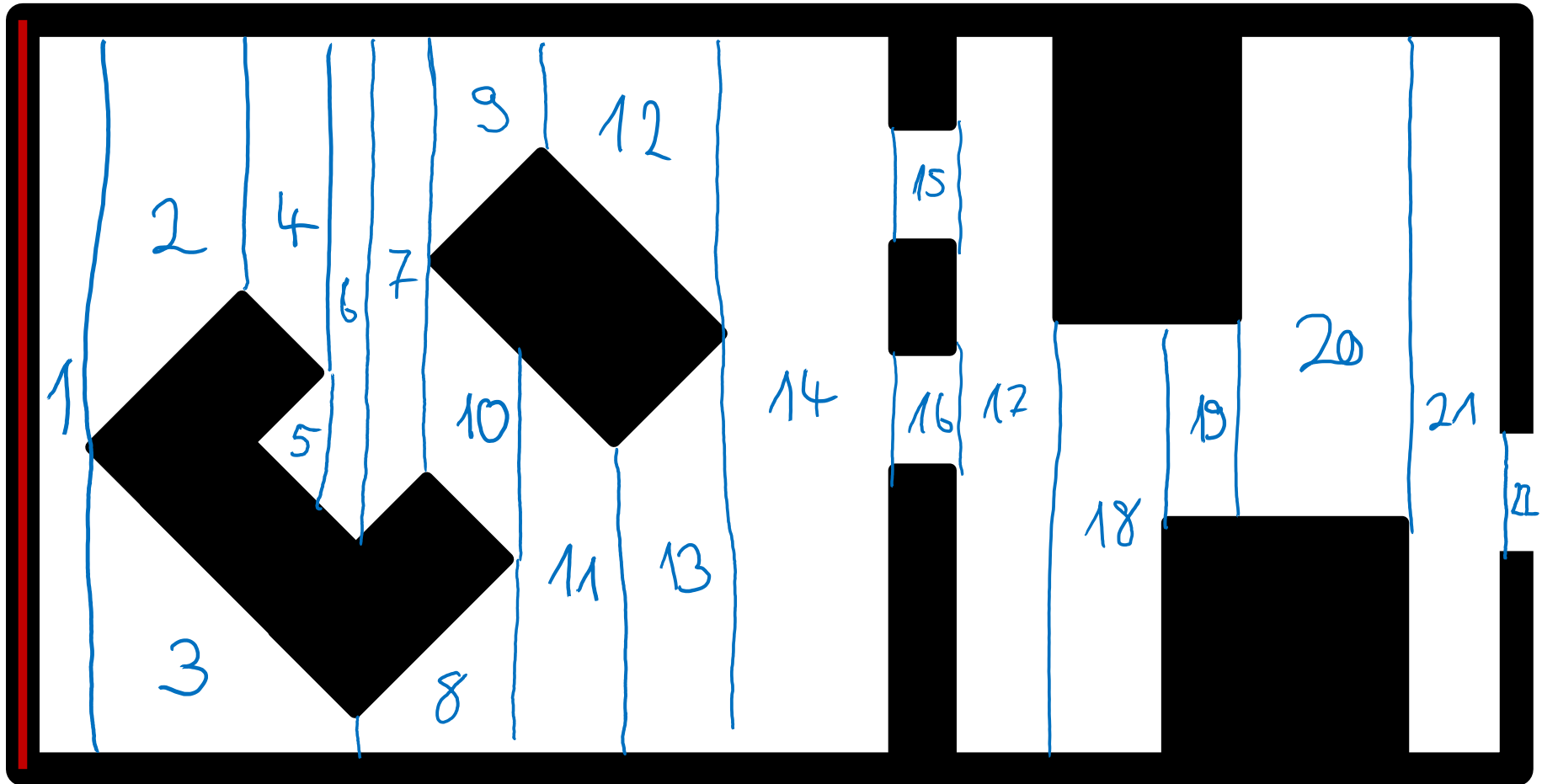
Welches Diagramm entsteht, wenn die Punktmenge anders aufgeteilt wird?

Aufgabe 2: Linesweep-Verfahren

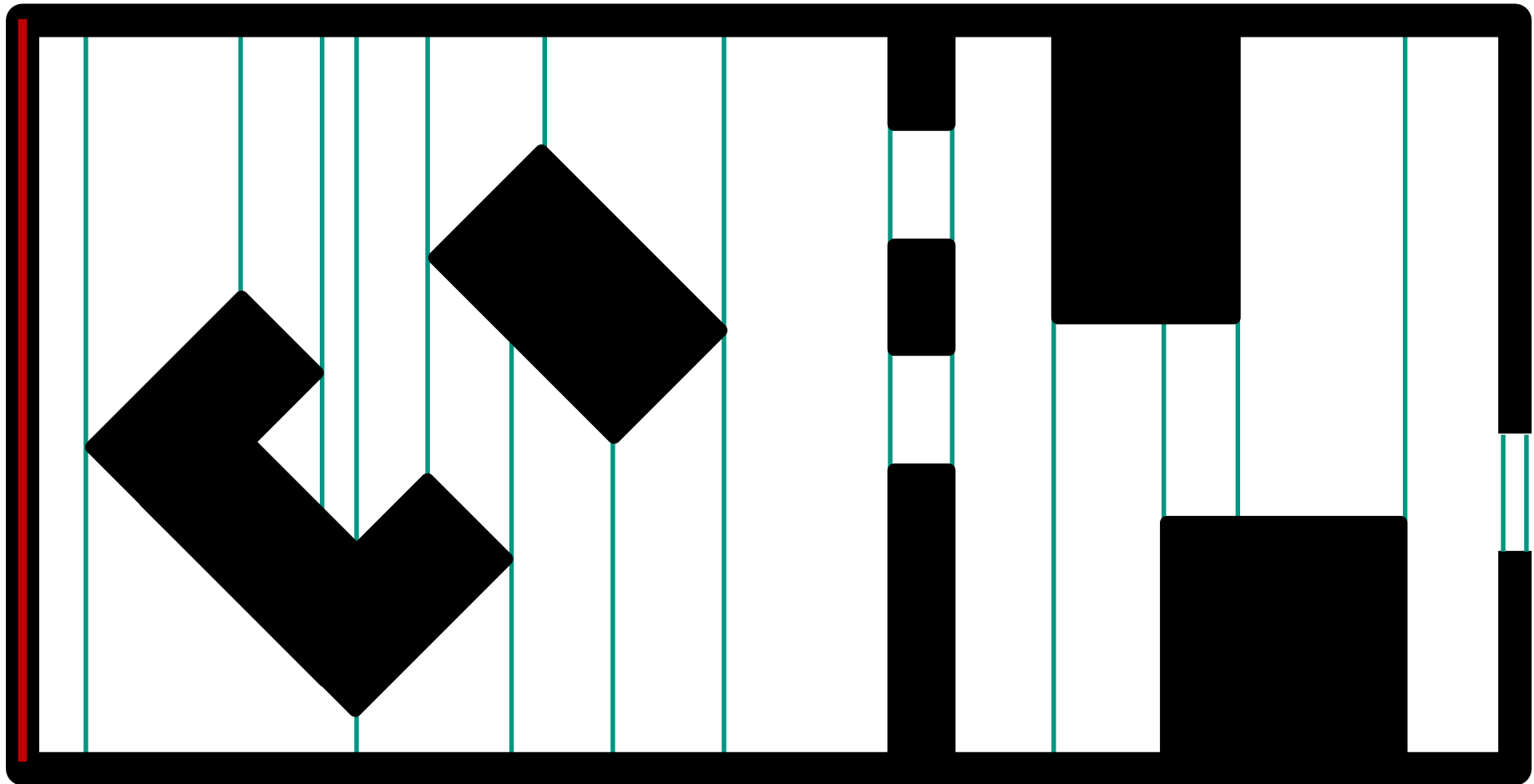


1. Zellzerlegung mittels Linesweep
2. Adjazenzgraph der Zellen
3. Pfad zwischen q_{start} und q_{ziel}

Aufgabe 2.1: Linesweep, Zellzerlegung

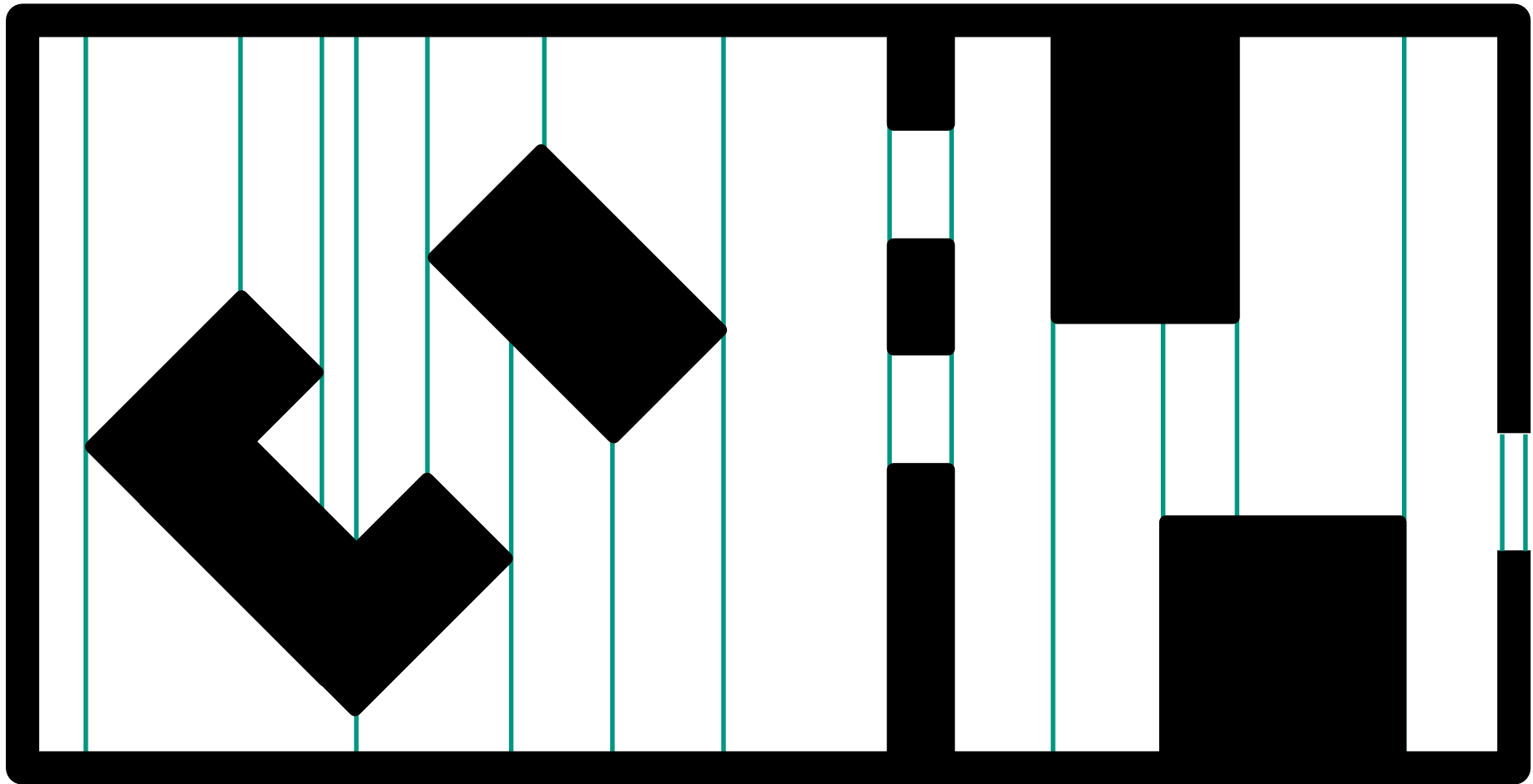


Aufgabe 2.1: Linesweep, Zellzerlegung



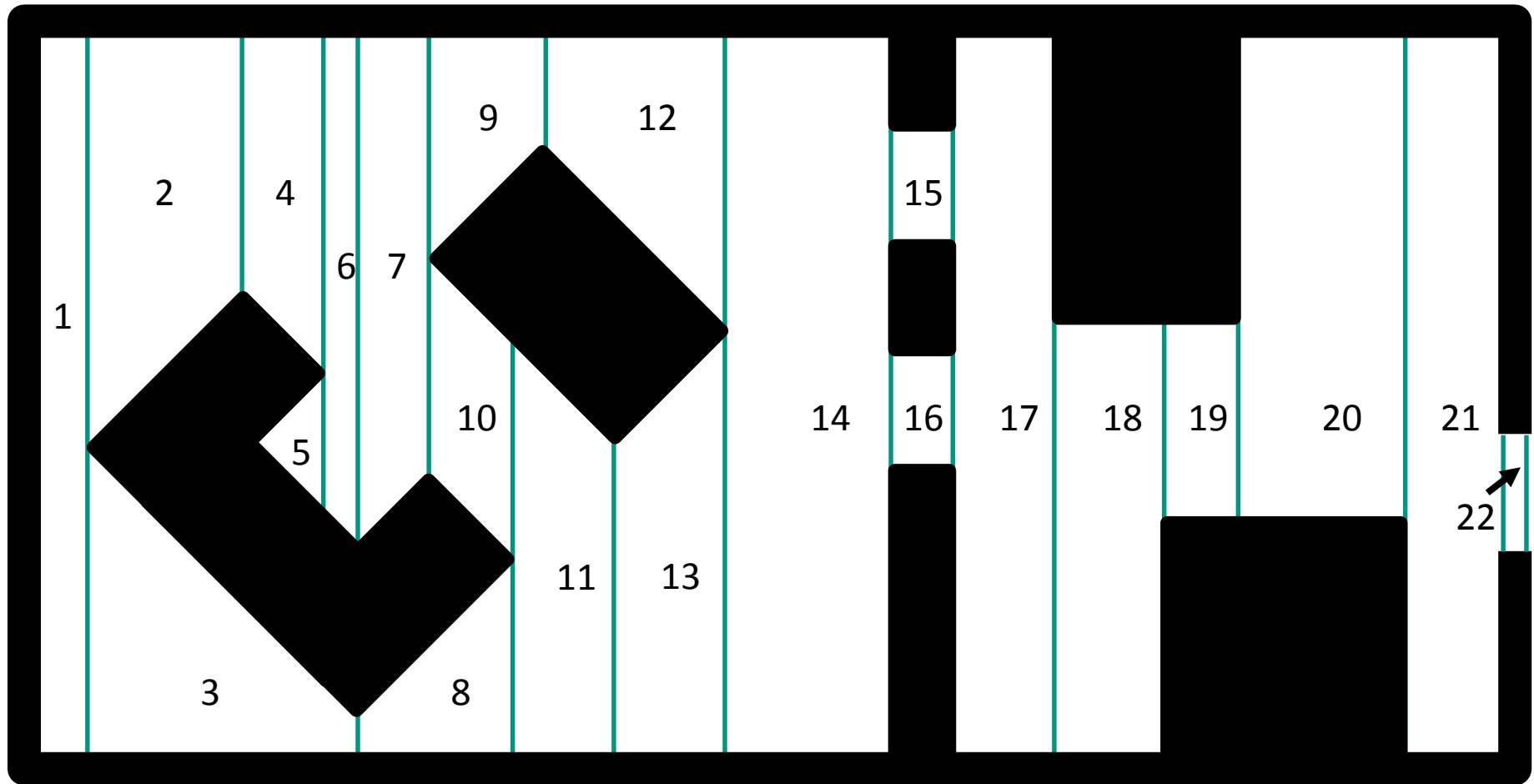
Aufgabe 2.1: Linesweep, Nummerierung der Zellen

Nummerierung von **links nach rechts**, dann von **oben nach unten**

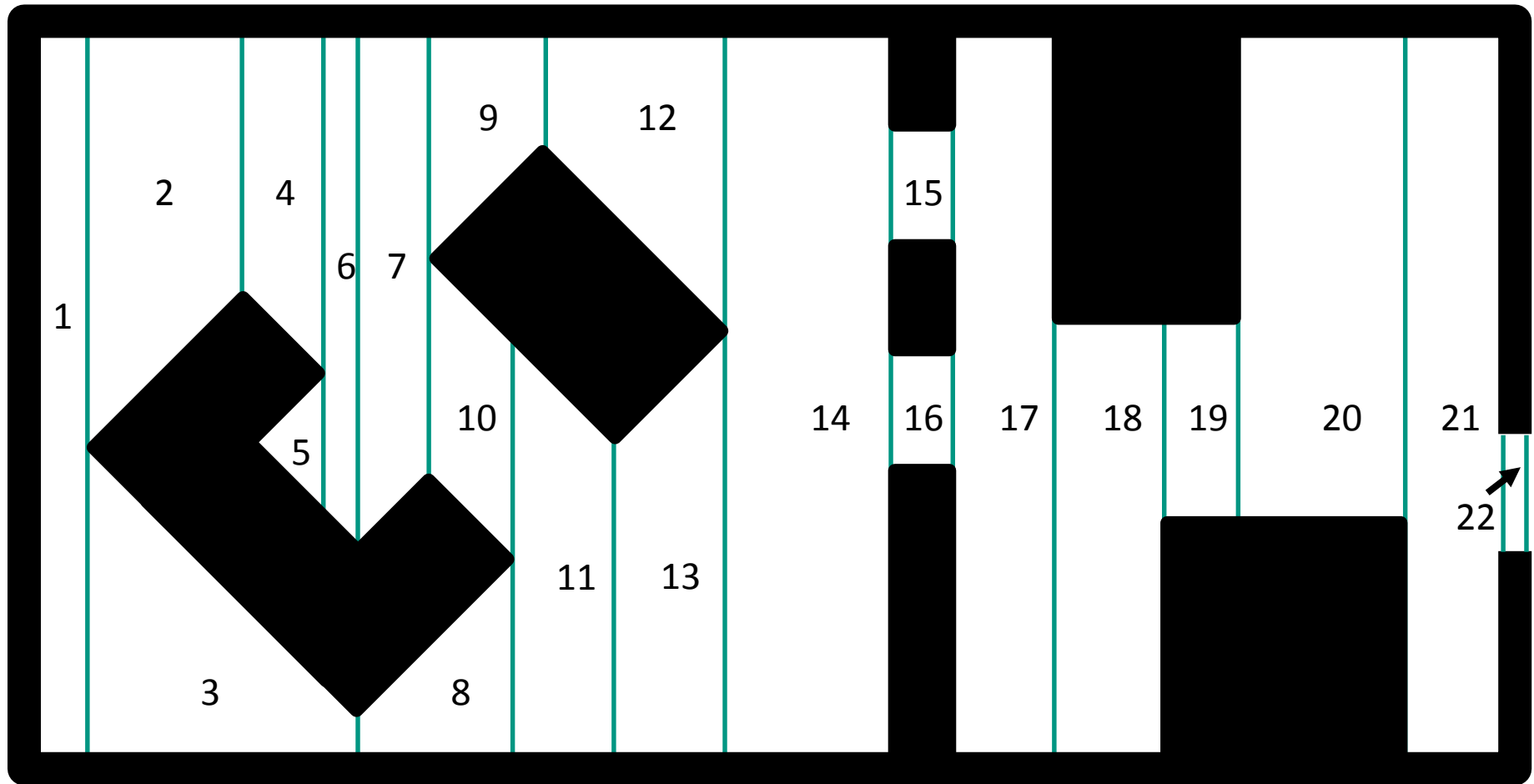


Aufgabe 2.1: Linesweep, Nummerierung der Zellen

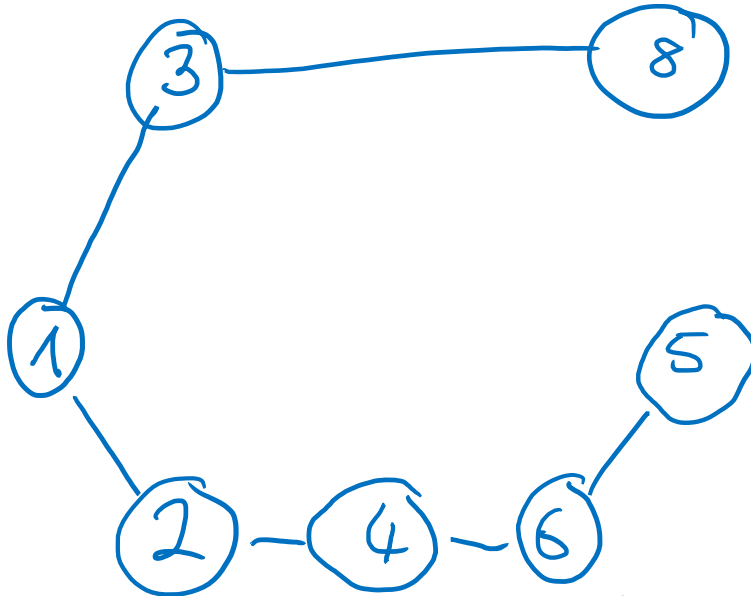
Nummerierung von **links nach rechts**, dann von **oben nach unten**



Aufgabe 2.2: Linesweep, Adjazenzgraph

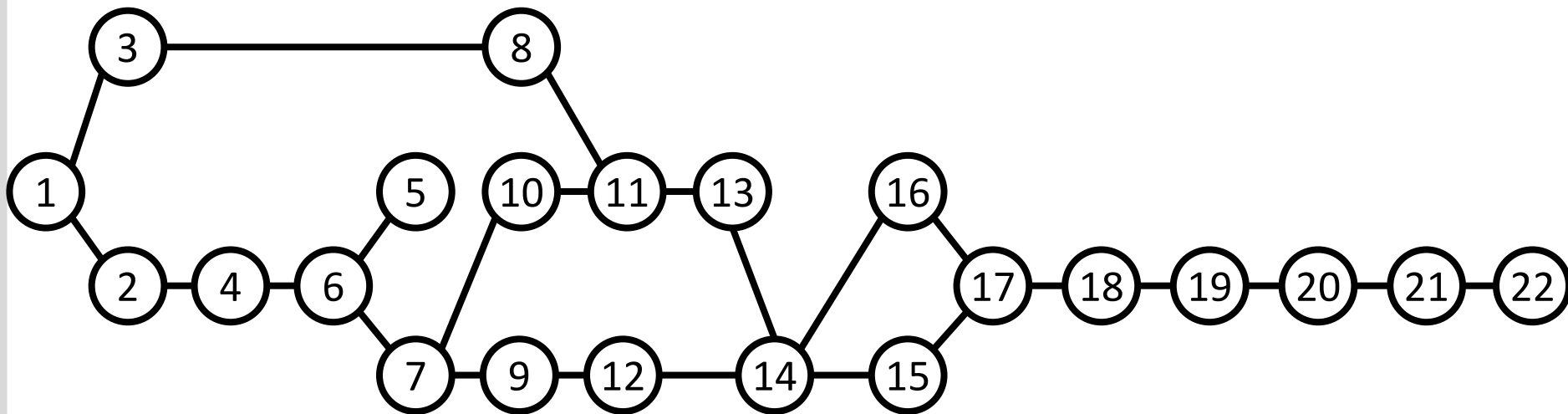


Aufgabe 2.2: Linesweep, Adjazenzgraph

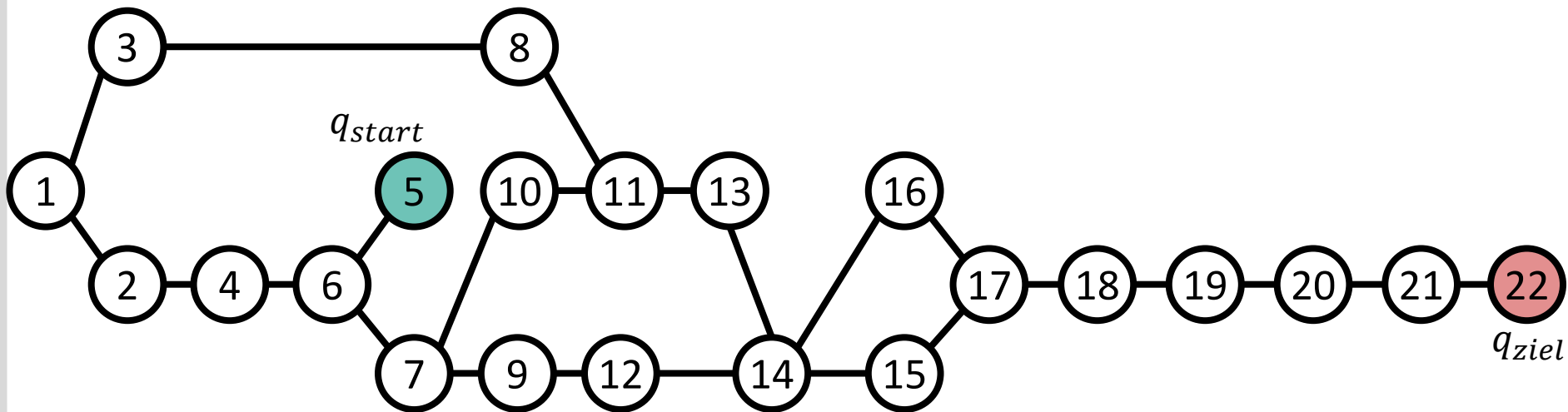


6 v a

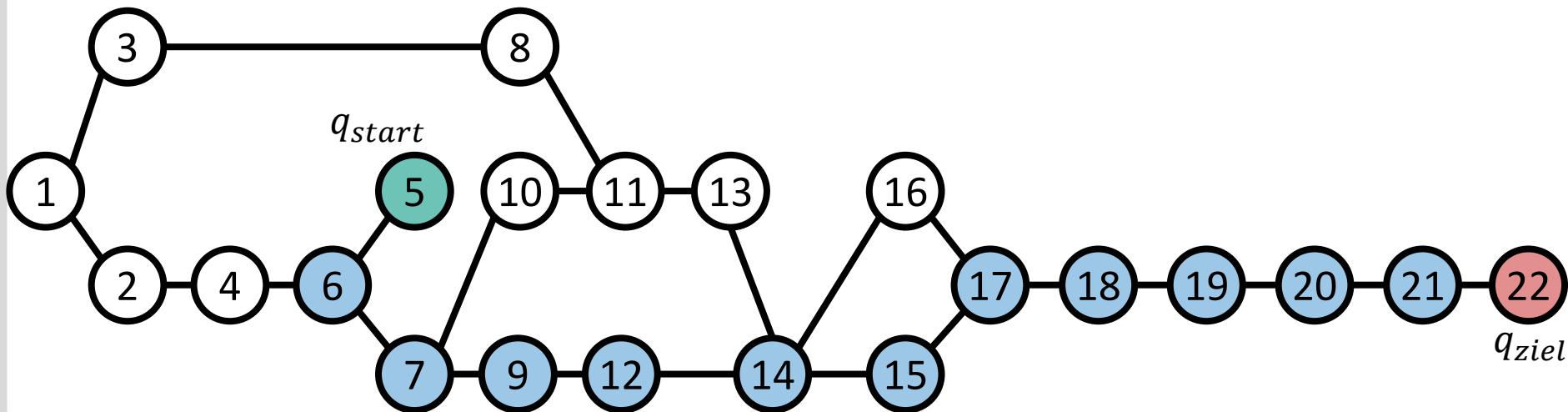
Aufgabe 2.2: Linesweep, Adjazenzgraph



Aufgabe 2.3: Linesweep, Pfad vom Start zum Ziel



Aufgabe 2.3: Linesweep, Pfad vom Start zum Ziel

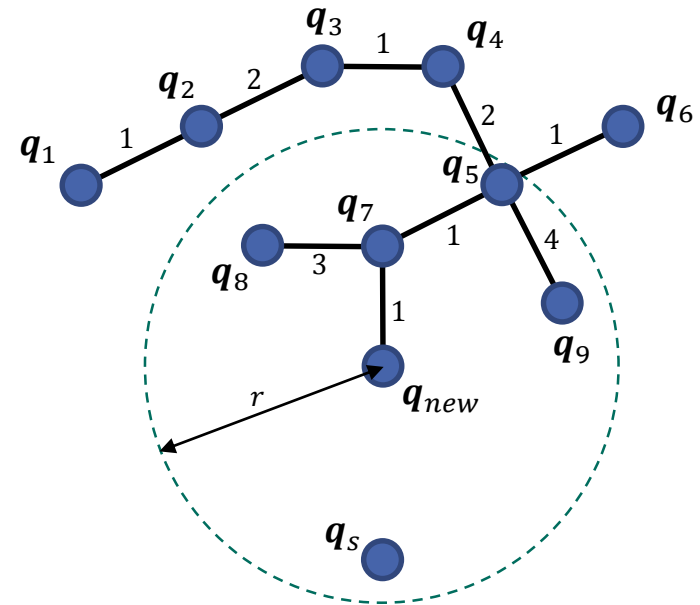


Pfad von q_{start} nach q_{ziel} :

5, 6, 7, 9, 12, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 21, 22

Aufgabe 3: RRT*

1. Wie wurde q_{new} ermittelt?
2. Pfadkosten für $q_1, \dots, q_9, q_{new}$
3. RRT* Funktion $Near(T, q_{new}, r)$
4. Welche Knoten werden für den Rewire-Schritt in Betracht gezogen?
5. Zeichnen Sie die Kanten nach dem Rewire-Schritt.



Baum T als Zwischenschritt des RRT*

- Knoten des Baums $q_1, \dots, q_9$
- Wegkosten an den Kanten
- q_{new} im aktuellen Schritt hinzugefügt

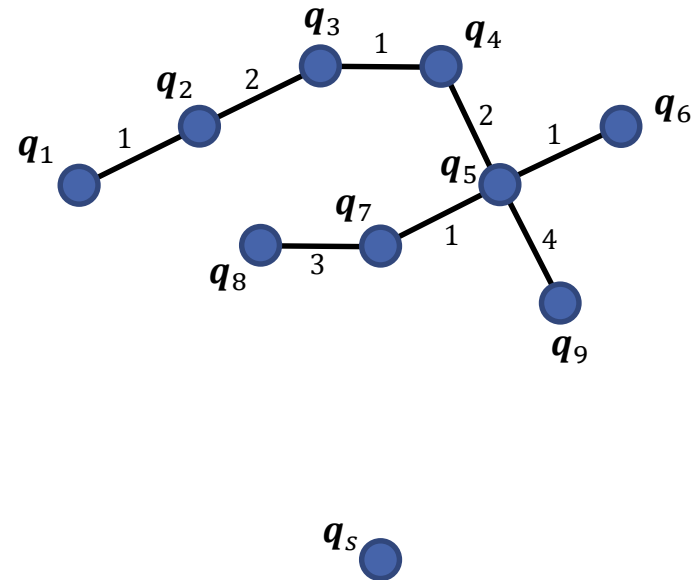
Aufgabe 3.1: Wie wurde q_{new} ermittelt?

q_s : Aktuelle Sample

d : Schrittweite

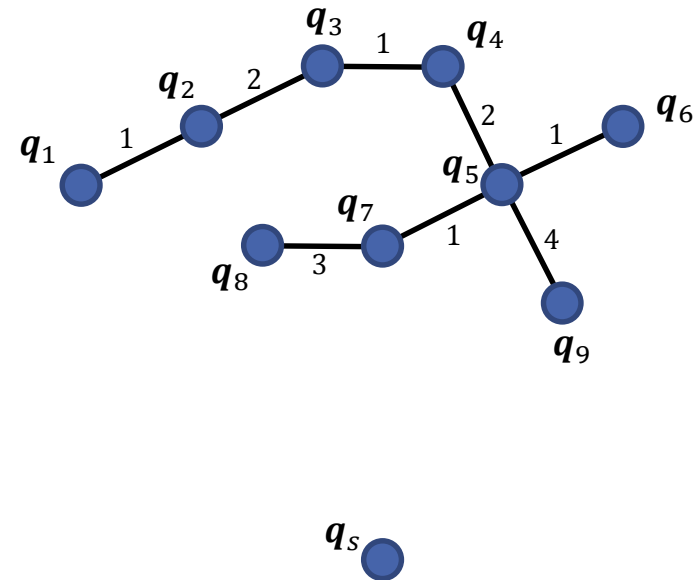
q_{nn} : Nächster Nachbar
(am nächsten an q_s)

$q_{new} \leftarrow \text{Steer}(q_{nn}, q_s, d)$



Aufgabe 3.1: Wie wurde q_{new} ermittelt?

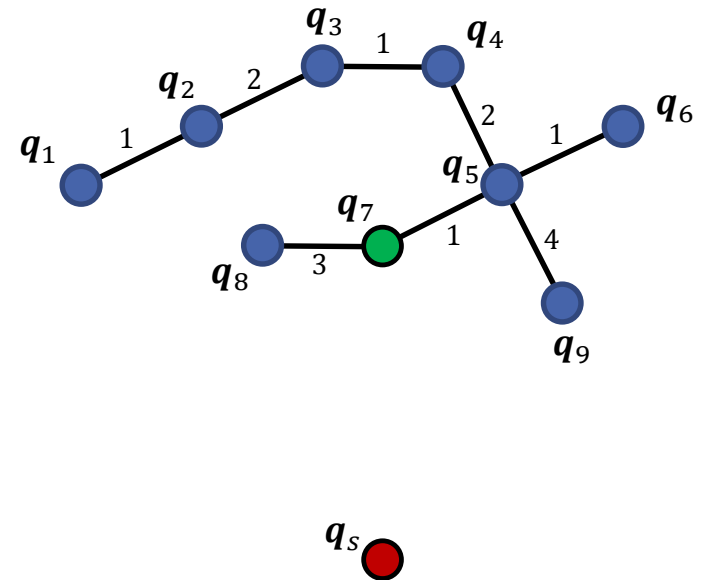
- $q_{new} = Steer(q_{nn}, q_s, d)$
 - q_s : Aktuelles Sample
 - q_{nn} : Nächster Nachbar von q_s
 - d : Schrittweite



Aufgabe 3.1: Wie wurde q_{new} ermittelt?

- $q_{new} = Steer(q_{nn}, q_s, d)$
 - q_s : Aktuelles Sample
 - q_{nn} : Nächster Nachbar von q_s
 - d : Schrittweite

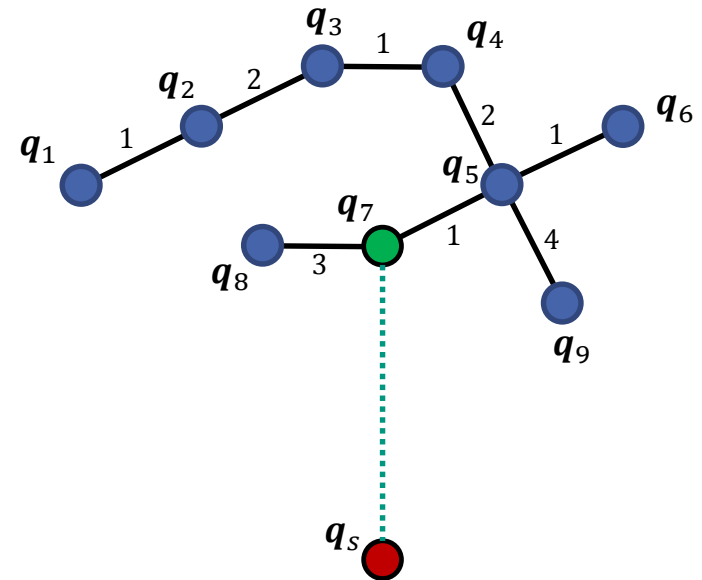
- ● q_s
- ● $q_{nn} = q_7$



Aufgabe 3.1: Wie wurde q_{new} ermittelt?

- $q_{new} = Steer(q_{nn}, q_s, d)$
 - q_s : Aktuelles Sample
 - q_{nn} : Nächster Nachbar von q_s
 - d : Schrittweite

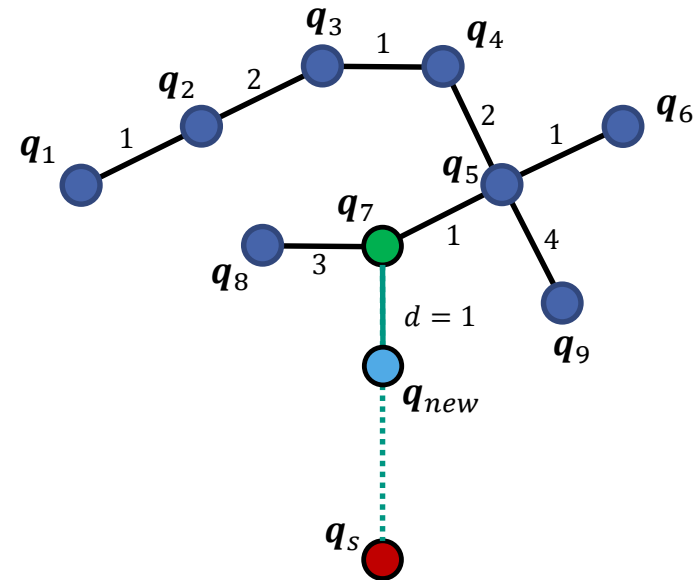
- ● q_s
- ● $q_{nn} = q_7$
- Verbindung von q_{nn} und q_s



Aufgabe 3.1: Wie wurde q_{new} ermittelt?

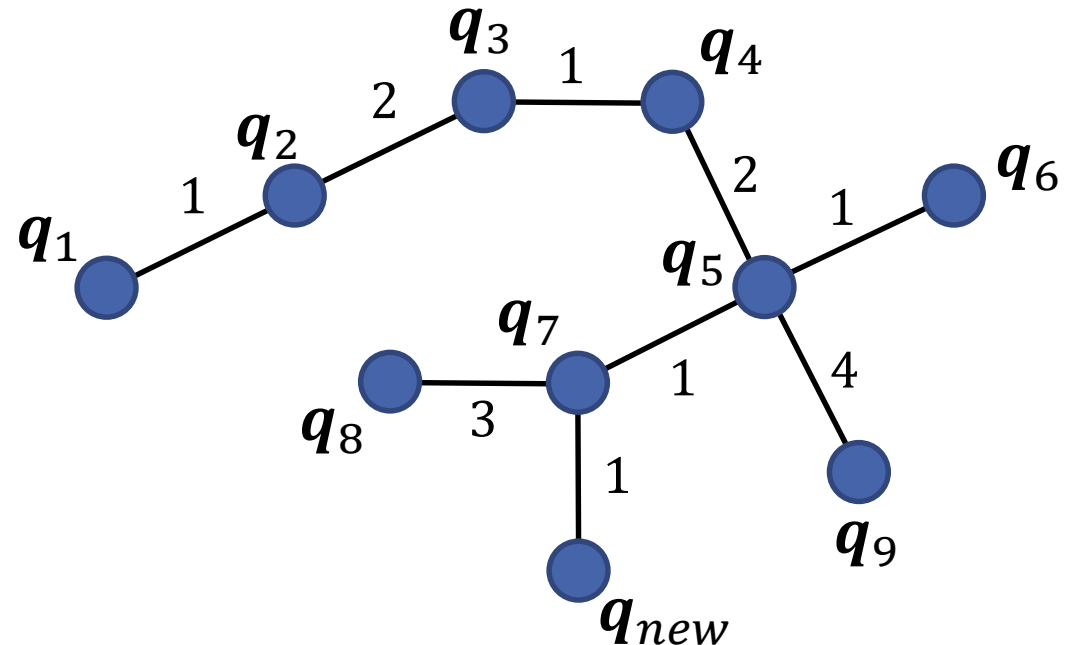
- $q_{new} = Steer(q_{nn}, q_s, d)$
 - q_s : Aktuelles Sample
 - q_{nn} : Nächster Nachbar von q_s
 - d : Schrittweite

- ● q_s
- ● $q_{nn} = q_7$
- Verbindung von q_{nn} und q_s
- — Beschränkung auf Schrittweite $d = 1$
- ● q_{new}



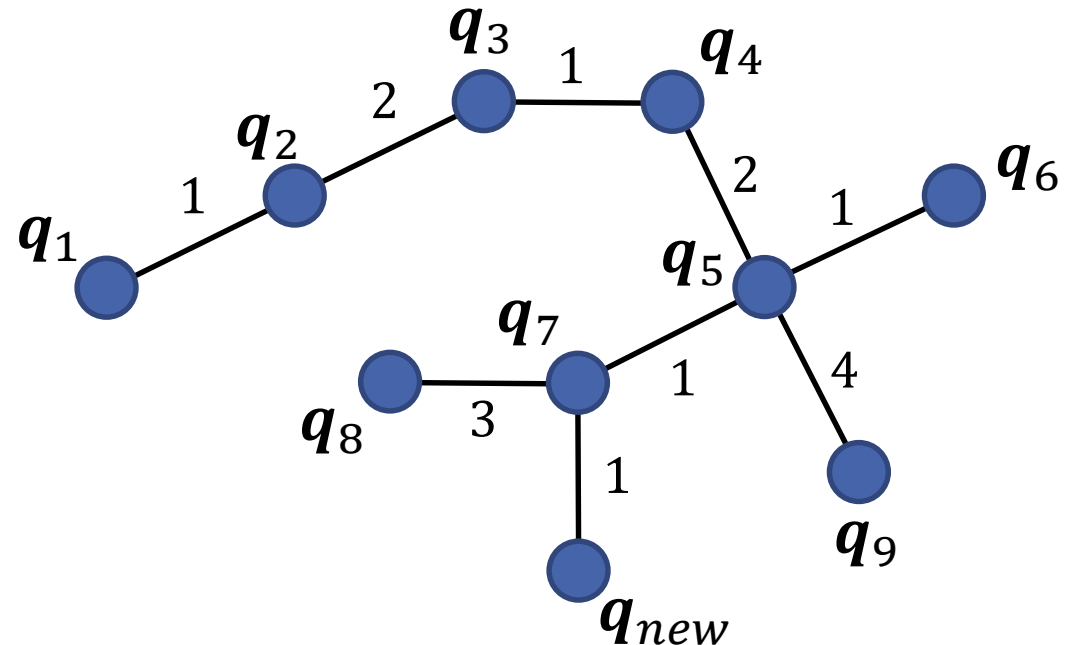
Aufgabe 3.2: Pfadkosten für $q_1, \dots, q_9, q_{new}$

Knoten	Akkumulierte Kosten
q_1	0
q_2	1
q_3	$1+2=3$
q_4	$1+2+1=4$
q_5	.
q_6	.
q_7	.
q_8	
q_9	
q_{new}	



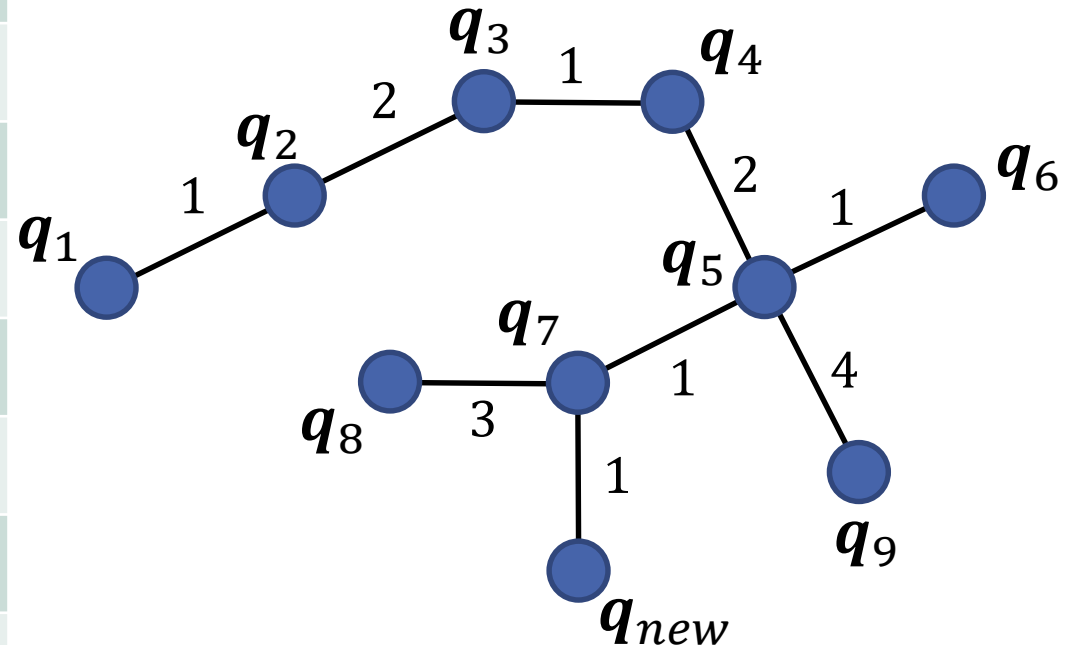
Aufgabe 3.2: Pfadkosten für $q_1, \dots, q_9, q_{new}$

Knoten	Akkumulierte Kosten
q_1	0
q_2	$c(q_1) + 1 = 0 + 1 = 1$
q_3	$c(q_2) + 2 = 1 + 2 = 3$
q_4	$c(q_3) + 1 = 3 + 1 = 4$
q_5	$c(q_4) + 2 = 4 + 2 = 6$
q_6	
q_7	
q_8	
q_9	
q_{new}	



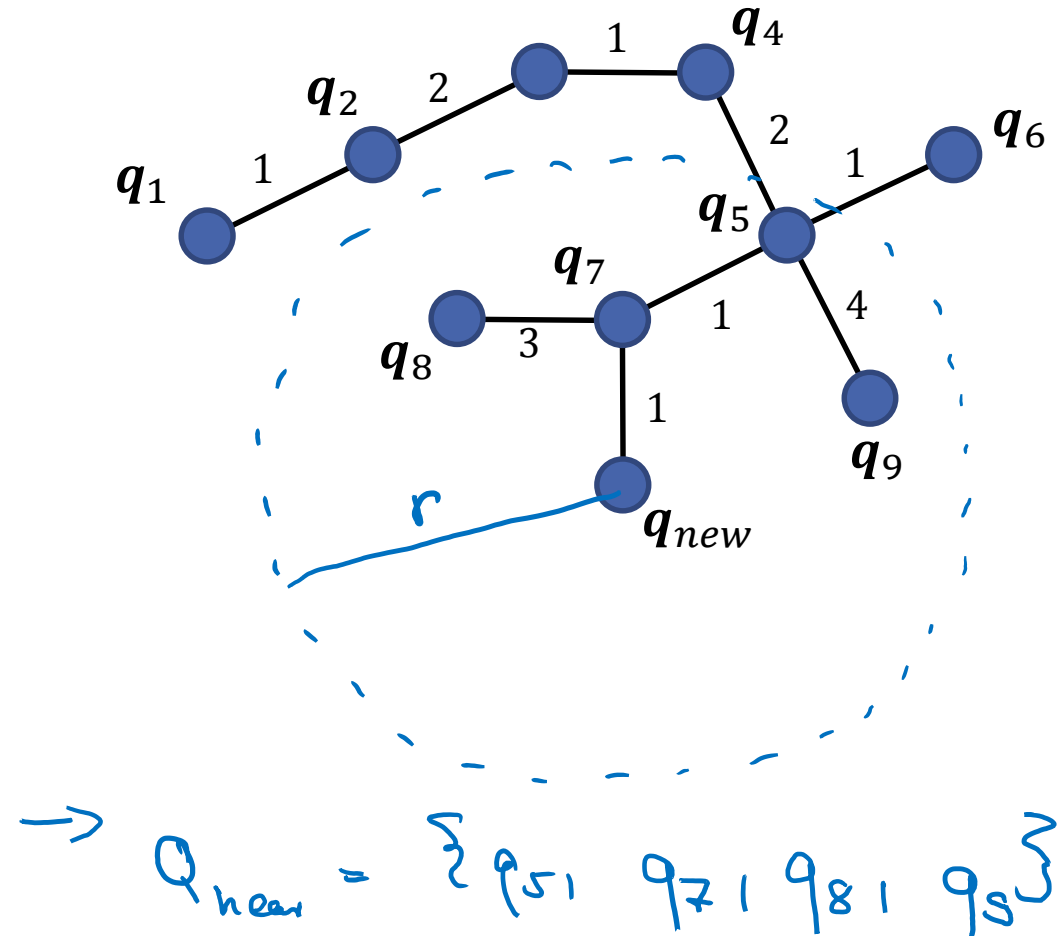
Aufgabe 3.2: Pfadkosten für $q_1, \dots, q_9, q_{new}$

Knoten	Akkumulierte Kosten
q_1	0
q_2	1
q_3	3
q_4	4
q_5	6
q_6	$c(q_5) + 1 = 6 + 1 = 7$
q_7	$c(q_5) + 1 = 6 + 1 = 7$
q_8	$c(q_8) + 3 = 7 + 3 = 10$
q_9	$c(q_5) + 4 = 6 + 4 = 10$
q_{new}	$c(q_7) + 1 = 7 + 1 = 8$



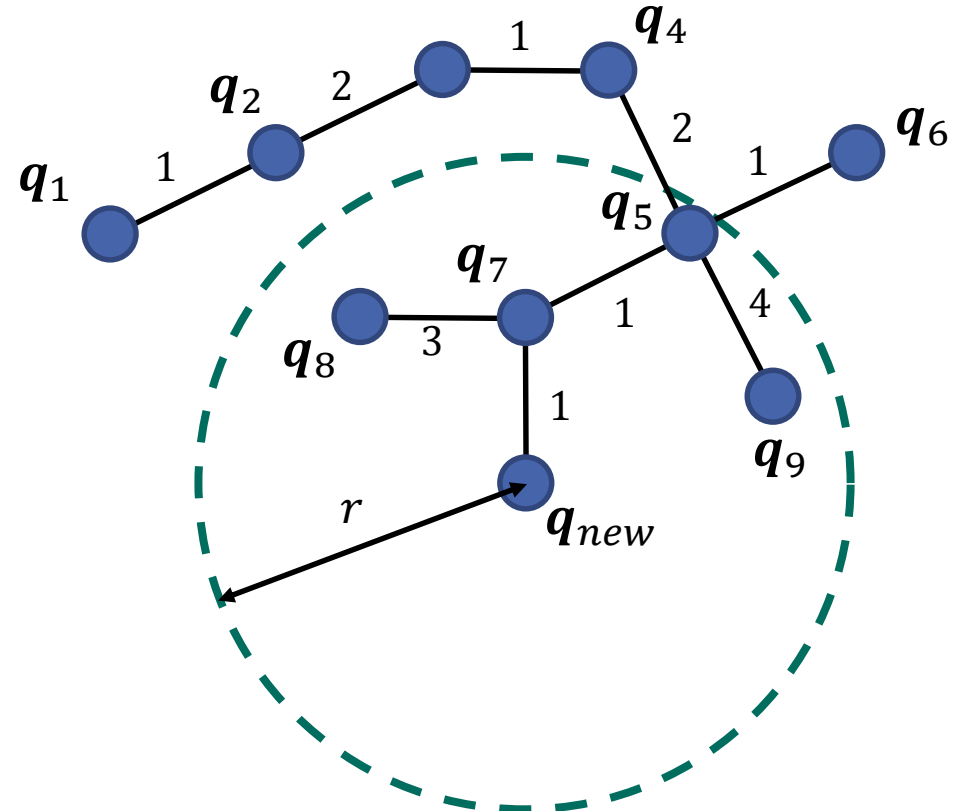
Aufgabe 3.3: RRT* Funktion $Near(T, q_{new}, r)$

■ $Q_{near} = Near(T, q_{new}, r)$



Aufgabe 3.3: RRT* Funktion $Near(T, q_{new}, r)$

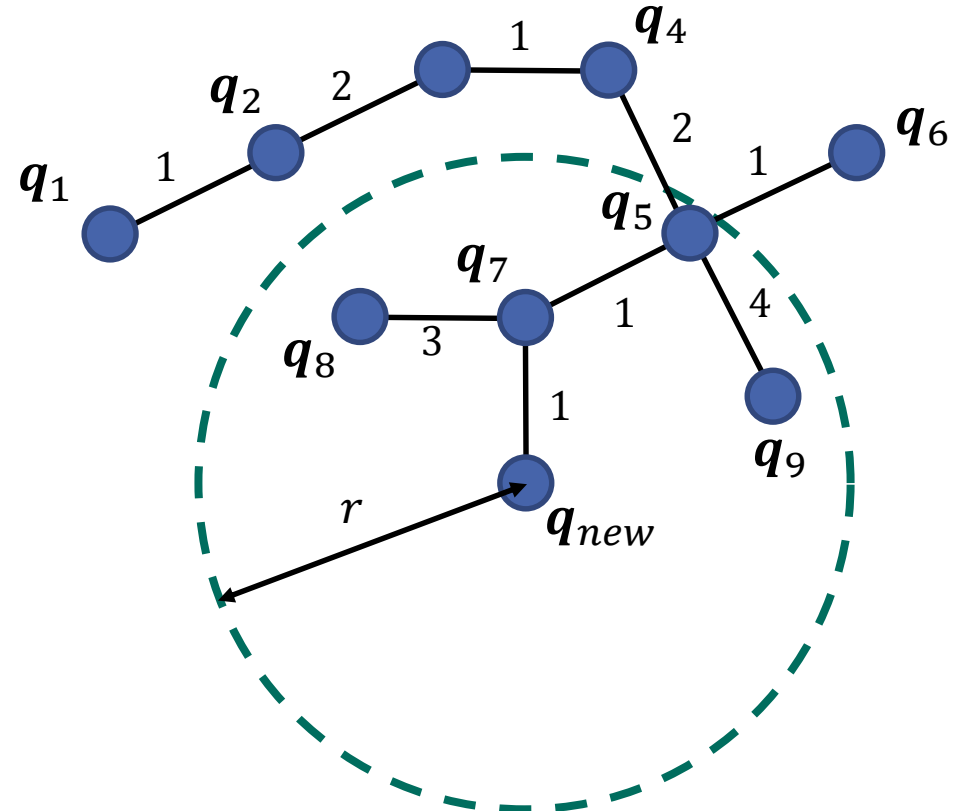
- $Q_{near} = Near(T, q_{new}, r)$
 - T : Baum
 - q_{new} : Neuer Knoten im Baum
 - r : Max. Abstand zur Bestimmung der Nachbarknoten
 - Q_{near} : Menge der Nachbarknoten mit Abstand $< r$



Aufgabe 3.3: RRT* Funktion $Near(T, q_{new}, r)$

- $Q_{near} = Near(T, q_{new}, r)$
 - T : Baum
 - q_{new} : Neuer Knoten im Baum
 - r : Max. Abstand zur Bestimmung der Nachbarknoten
 - Q_{near} : Menge der Nachbarknoten mit Abstand $< r$

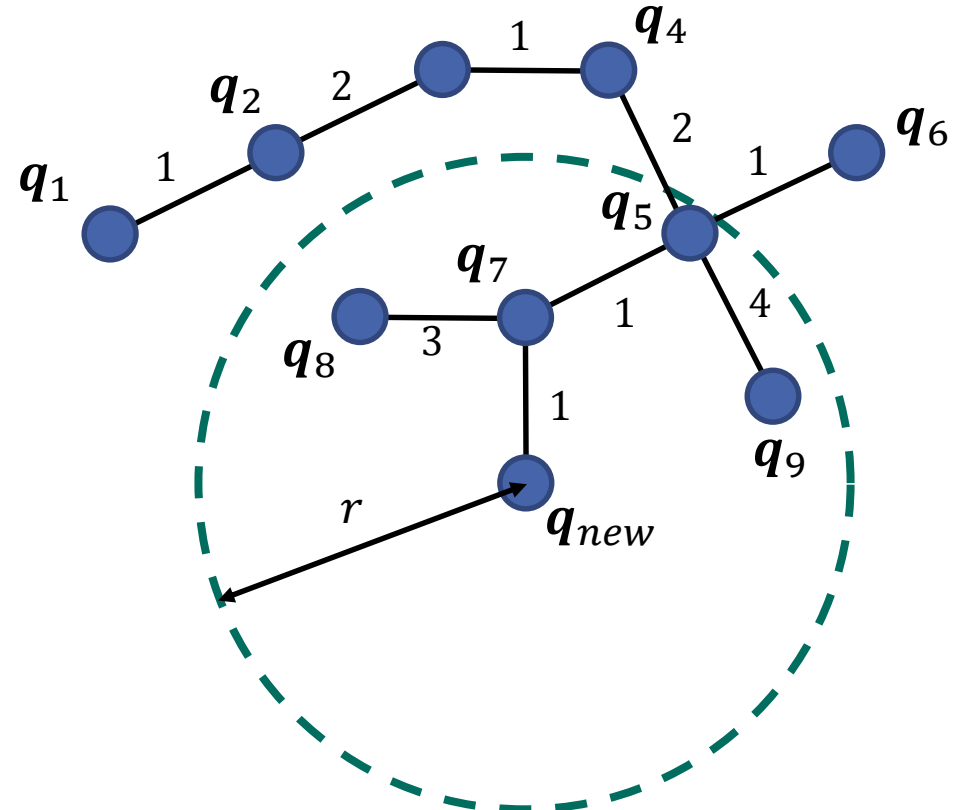
- $Near(T, q_{new}, r)$ ermittelt alle Knoten aus T , deren Abstand zu q_{new} maximal r beträgt.



Aufgabe 3.4: Knoten für den Rewire-Schritt

- $Q_{near} = Near(T, q_{new}, r)$
 - T : Baum
 - q_{new} : Neuer Knoten im Baum
 - r : Max. Abstand zur Bestimmung der Nachbarknoten
 - Q_{near} : Menge der Nachbarknoten mit Abstand $< r$

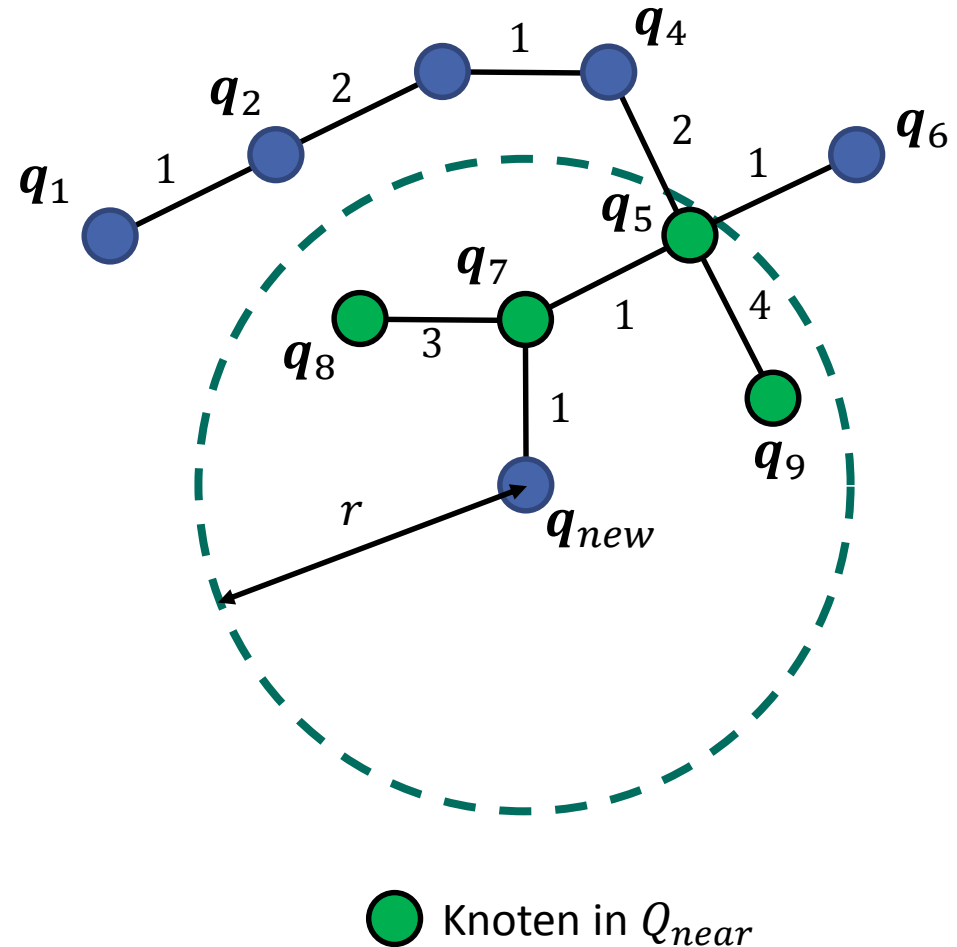
■ $Q_{near} = \{$



Aufgabe 3.4: Knoten für den Rewire-Schritt

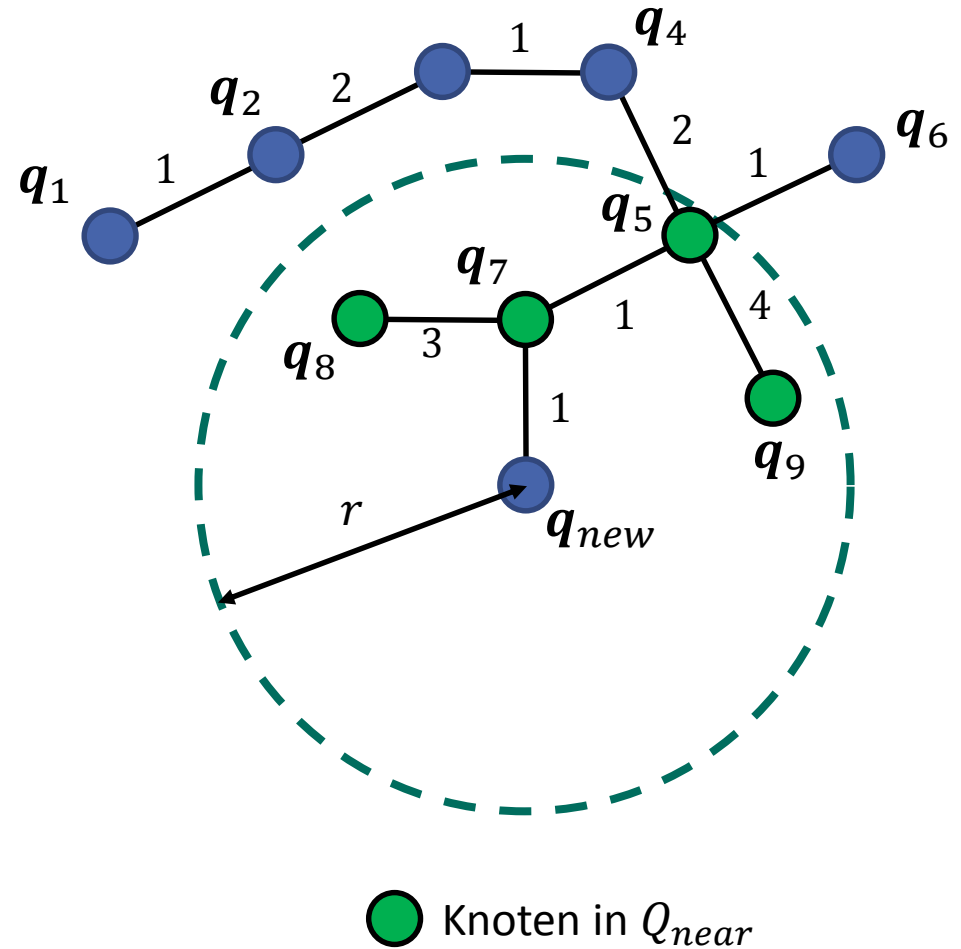
- $Q_{near} = Near(T, q_{new}, r)$
 - T : Baum
 - q_{new} : Neuer Knoten im Baum
 - r : Max. Abstand zur Bestimmung der Nachbarknoten
 - Q_{near} : Menge der Nachbarknoten mit Abstand $< r$

■ $Q_{near} = \{q_5, q_7, q_8, q_9\}$



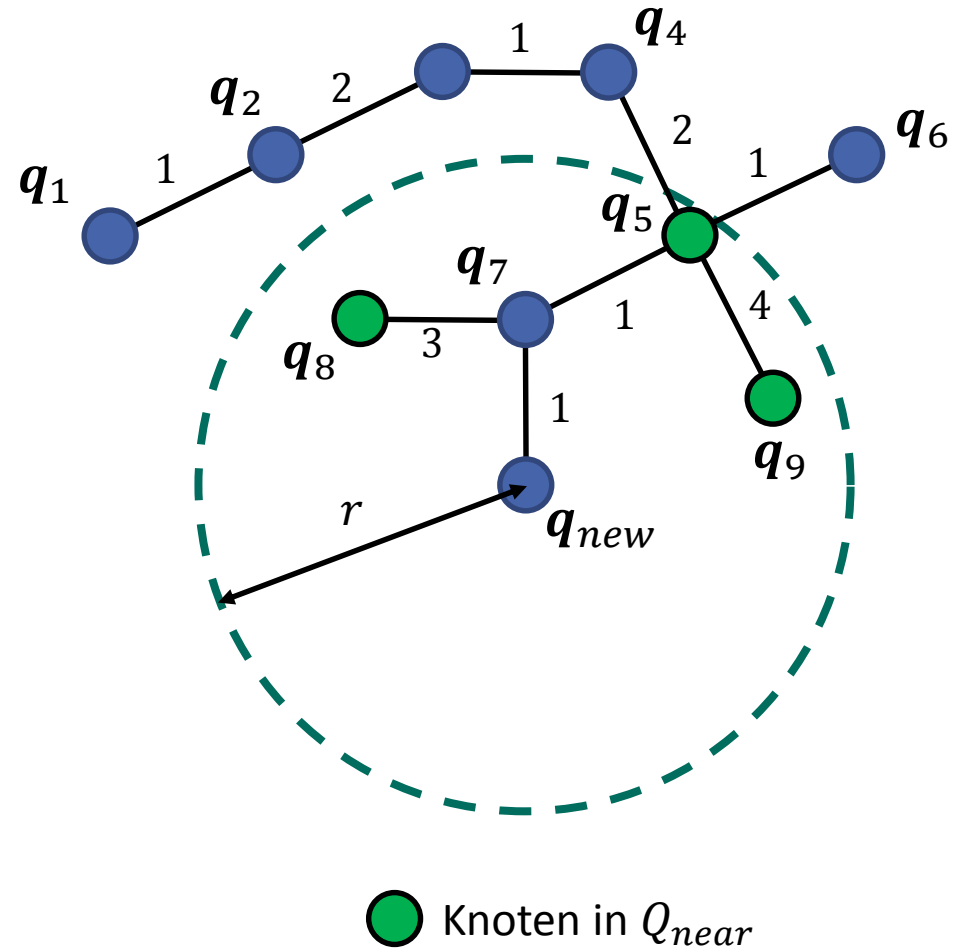
Aufgabe 3.5: Rewire-Schritt

■ $Q_{near} = \{q_5, q_7, q_8, q_9\}$



Aufgabe 3.5: Rewire-Schritt

- $Q_{near} = \{q_5, q_7, q_8, q_9\}$
- q_7 ist bereits mit q_{new} verbunden



Aufgabe 3.5: Rewire-Schritt

■ $Q_{near} = \{q_5, q_7, q_8, q_9\}$

■ Kosten

■ $Cost(q_{new}) = 8$

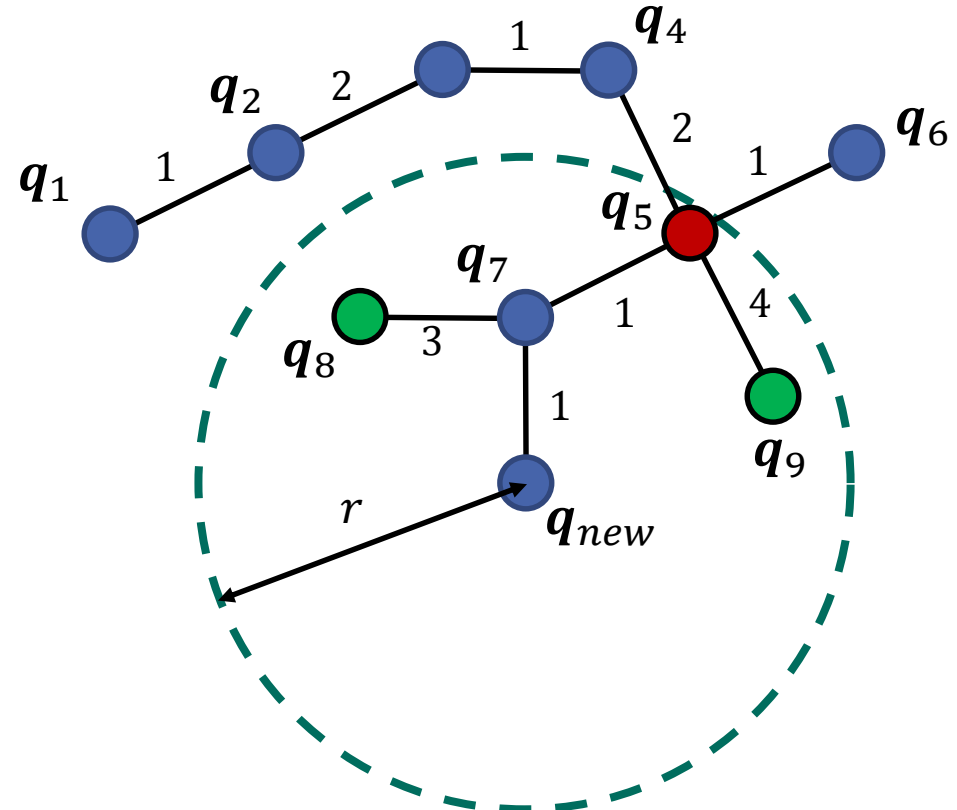
■ $Cost(q_5) = 6$

■ $Cost(q_8) = 10$

■ $Cost(q_9) = 10$

■ $Cost(q_{new}, q_5) = 5$

■ Rewire q_5 :



 Knoten in Q_{near}

 Betrachteter Knoten

Aufgabe 3.5: Rewire-Schritt

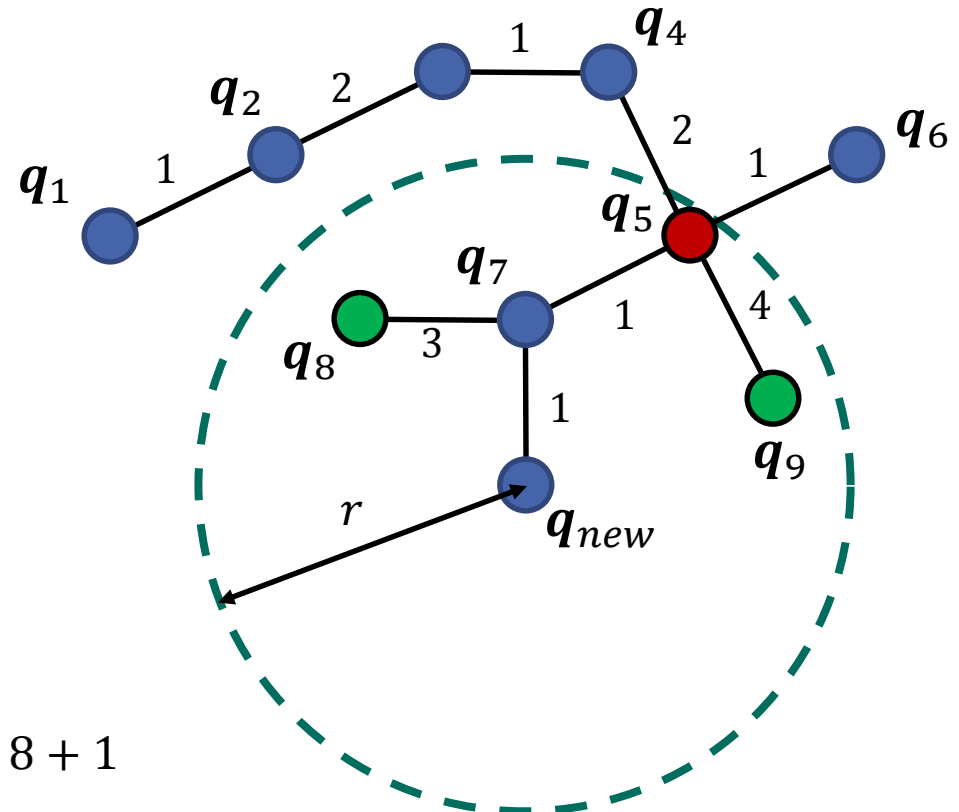
■ $Q_{near} = \{q_5, q_7, q_8, q_9\}$

■ Kosten

- $Cost(q_{new}) = 8$
- $Cost(q_5) = 6$
- $Cost(q_8) = 10$
- $Cost(q_9) = 10$
- $Cost(q_{new}, q_5) = 5$

■ Rewire q_5 :

- $Cost(q_{new}) + Cost(q_{new}, q_5) = 8 + 1$
- $9 > Cost(q_5) = 6$
- ➔ Kein Rewiring



 Knoten in Q_{near}

 Betrachteter Knoten

Aufgabe 3.5: Rewire-Schritt

■ $Q_{near} = \{q_5, q_7, q_8, q_9\}$

■ Kosten

■ $Cost(q_{new}) = 8$

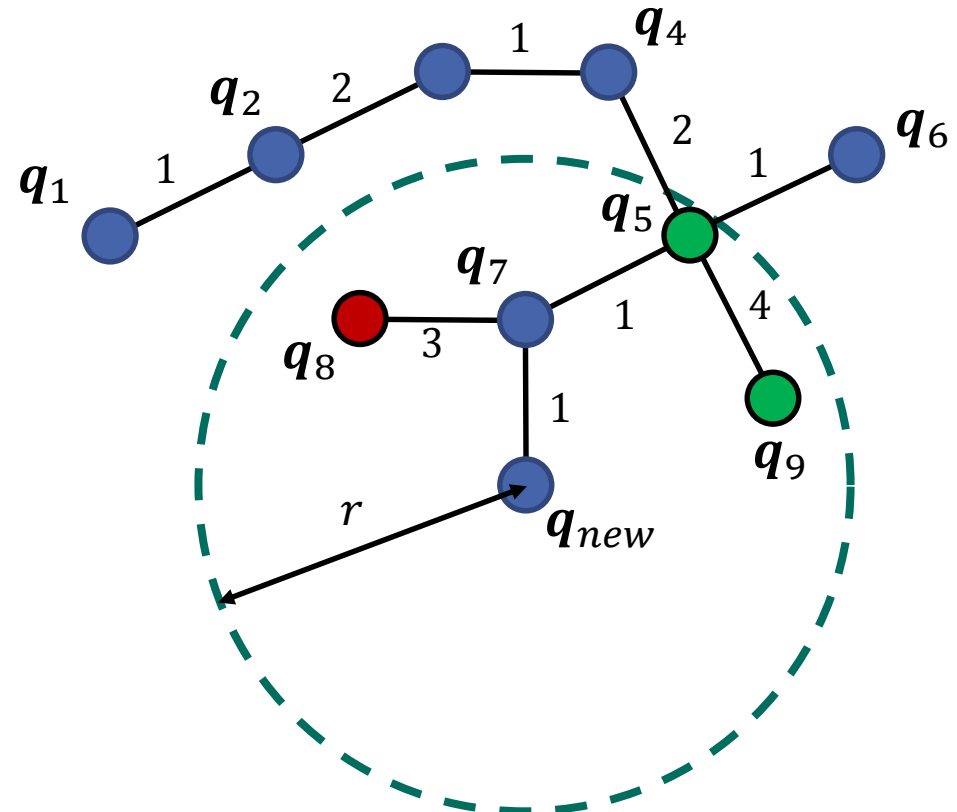
■ $Cost(q_5) = 6$

■ $Cost(q_8) = 10$

■ $Cost(q_9) = 10$

■ $Cost(q_{new}, q_8) = 1$

■ Rewire q_8 :



 Knoten in Q_{near}

 Betrachteter Knoten

Aufgabe 3.5: Rewire-Schritt

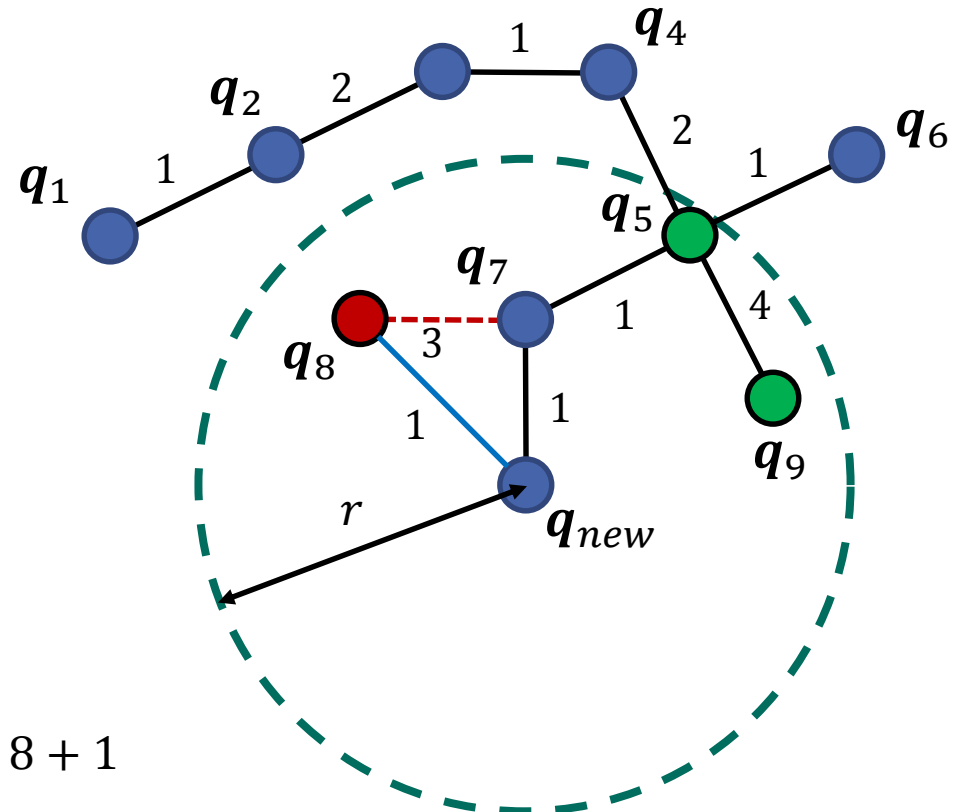
■ $Q_{near} = \{q_5, q_7, q_8, q_9\}$

■ Kosten

- $Cost(q_{new}) = 8$
- $Cost(q_5) = 6$
- $Cost(q_8) = 10$
- $Cost(q_9) = 10$
- $Cost(q_{new}, q_8) = 1$

■ Rewire q_8 :

- $Cost(q_{new}) + Cost(q_{new}, q_8) = 8 + 1$
- $9 < Cost(q_8) = 10$
- ➔ Rewiring



 Knoten in Q_{near}

 Betrachteter Knoten

Aufgabe 3.5: Rewire-Schritt

■ $Q_{near} = \{q_5, q_7, q_8, q_9\}$

■ Kosten

■ $Cost(q_{new}) = 8$

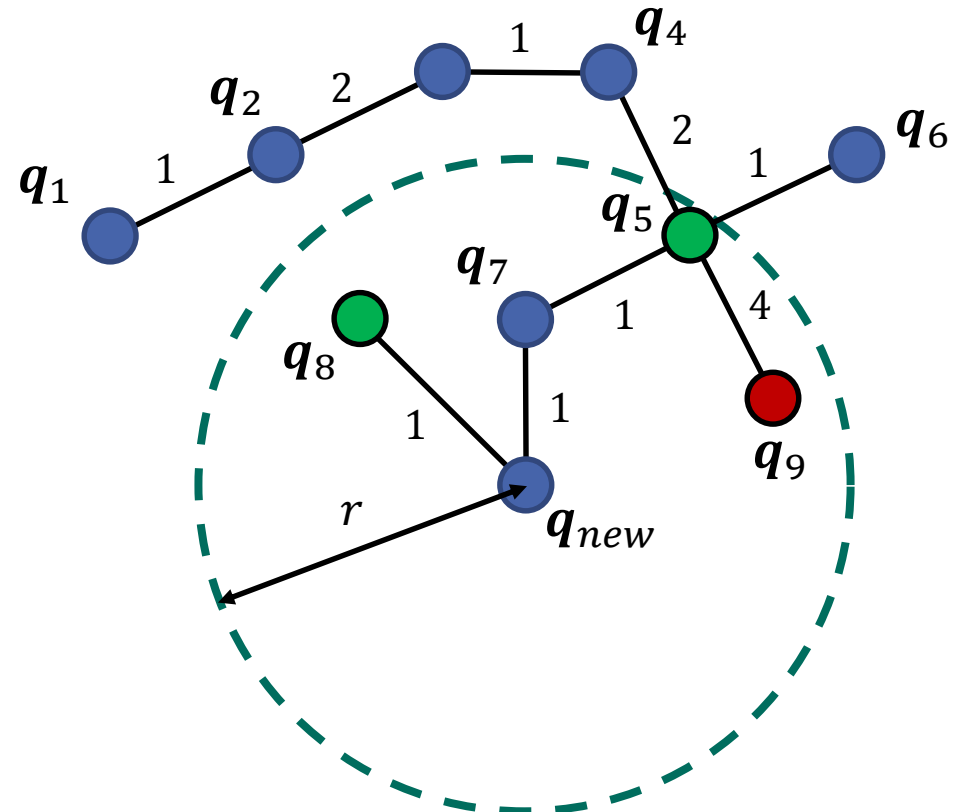
■ $Cost(q_5) = 6$

■ $Cost(q_8) = 10$

■ $Cost(q_9) = 10$

■ $Cost(q_{new}, q_9) = 1$

■ Rewire q_9 :



 Knoten in Q_{near}

 Betrachteter Knoten

Aufgabe 3.5: Rewire-Schritt

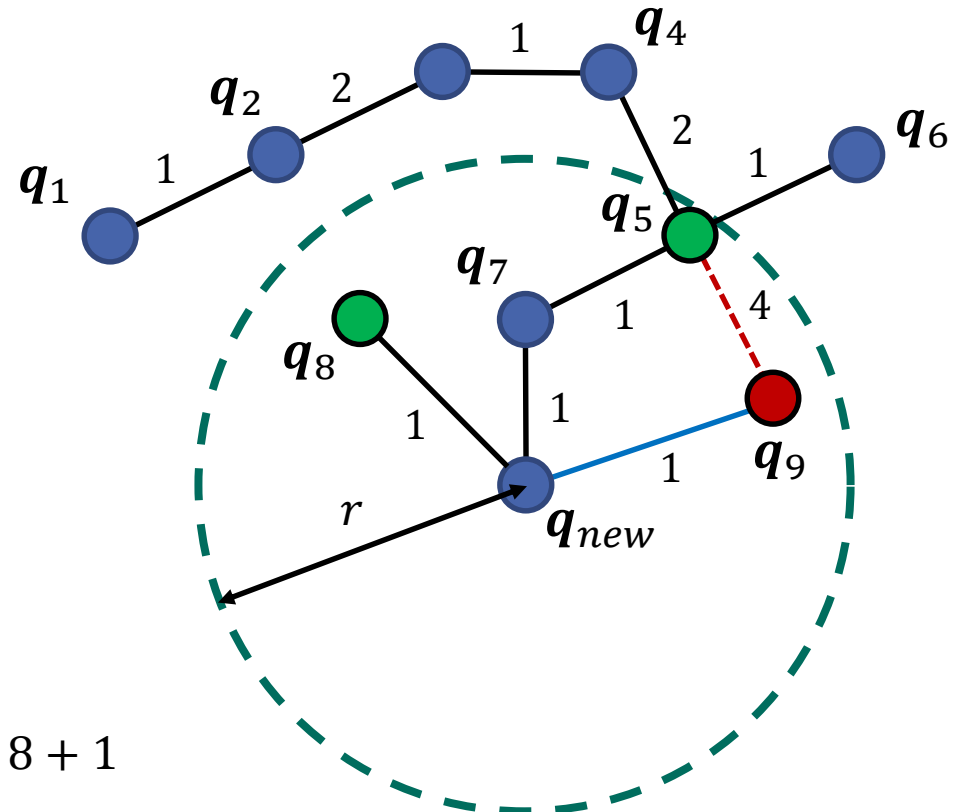
■ $Q_{near} = \{q_5, q_7, q_8, q_9\}$

■ Kosten

- $Cost(q_{new}) = 8$
- $Cost(q_5) = 6$
- $Cost(q_8) = 10$
- $Cost(q_9) = 10$
- $Cost(q_{new}, q_9) = 1$

■ Rewire q_9 :

- $Cost(q_{new}) + Cost(q_{new}, q_9) = 8 + 1$
 - $9 < Cost(q_8) = 10$
- ➔ Rewiring



 Knoten in Q_{near}

 Betrachteter Knoten

Aufgabe 3.5: Rewire-Schritt

■ $Q_{near} = \{q_5, q_7, q_8, q_9\}$

■ Kosten

■ $Cost(q_{new}) = 8$

■ $Cost(q_5) = 6$

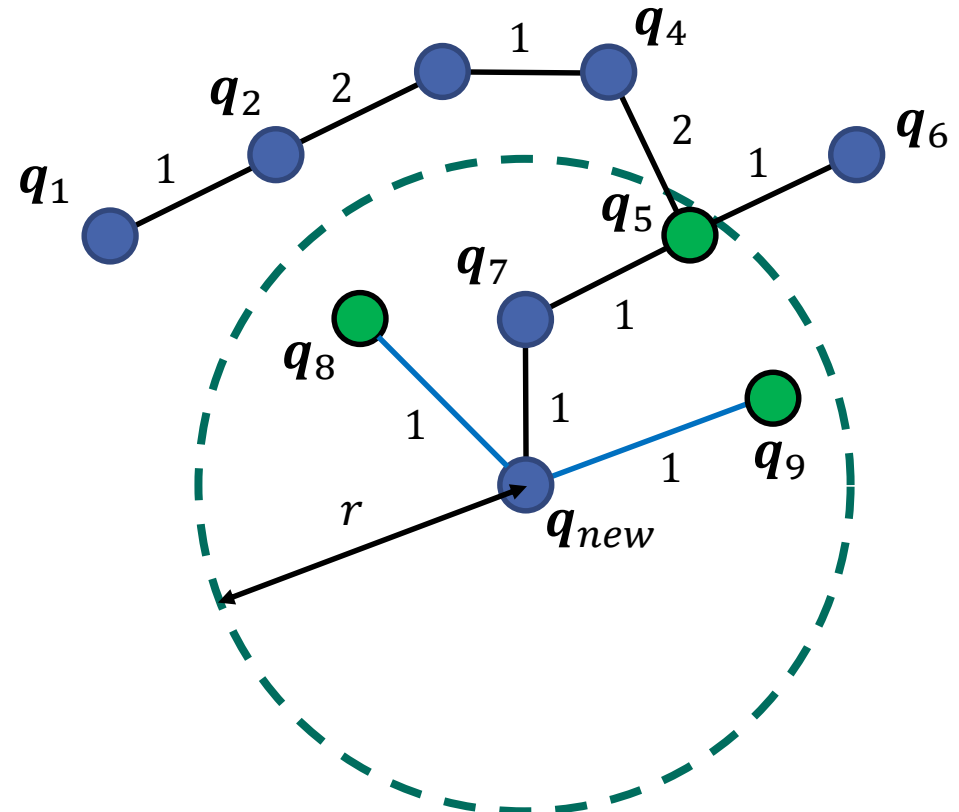
■ $Cost(q_8) = 10$

■ $Cost(q_9) = 10$

■ Ergebnis:

■ Rewire: $q_{new} \rightarrow q_8$

■ Rewire: $q_{new} \rightarrow q_9$



 Knoten in Q_{near}

 Betrachteter Knoten

Aufgabe 4: A*-Algorithmus

1. Finde den optimalen Pfad von v_2 nach v_{13}
 - Nur horizontale und vertikale Bewegungen erlaubt
 - Kosten:
 - Betreten einer grauen Zelle: 1
 - Betreten einer gelben Zelle: 4
 - Heuristik h : Euklidische Distanz zu v_{13}
(z.B. $h(v_{11}) = \sqrt{2}$)
2. Warum ist die euklidische Distanz eine geeignete Heuristik?
3. Wann findet der A*-Algorithmus eine Lösung?

v_1	v_2	v_3
v_4	v_5	v_6
v_7	v_8	v_9
v_{10}	v_{11}	v_{12}
v_{13}	v_{14}	v_{15}

A*-Algorithmus

- Iterativer Ansatz
- Es werden zwei Knotenlisten verwaltet
 - **Open Set** O : Noch zu besuchende Knoten
 - **Closed Set** C : Bereits besuchte Knoten
- **Update**: Für einen besuchten Knoten v_n :
 - **Vorgängerknoten** $pred(v_n)$
 - **Akkumulierte Kosten**, um v_n zu erreichen: $g(v_n)$
 - **Heuristik** für die erwarteten Kosten zum Ziel: $h(v_n)$
- **Initialisierung**
 - $O = \{v_s\}$
 - $C = \{\}$
 - $g(v_i) = \infty, \quad 1 \leq i \leq K$
 - $g(v_s) = 0$

A*-Algorithmus

■ Algorithmus

Solange $O \neq \emptyset$

- Bestimme den zu erweiternden Knoten
 - Finde $v_i \in O$ mit minimalem $f(v_i) = g(v_i) + h(v_i)$
- Wenn $v_i = v_{\text{ziel}}$
Lösung gefunden: Traversiere Vorgänger von v_i bis v_{start} erreicht ist.
- $O.\text{remove}(v_i)$
- $C.\text{add}(v_i)$
- **Update** für alle Nachfolger v_j von v_i durchführen
 - Wenn $v_j \in C$, dann überspringe v_j
 - Wenn $v_j \notin O$, dann $O.\text{add}(v_j)$
 - Wenn $g(v_i) + \text{cost}(v_i, v_j) < g(v_j)$
 - $g(v_j) = g(v_i) + \text{cost}(v_i, v_j)$
 - $h(v_j) = \text{heuristic}(v_j, v_{\text{ziel}})$
 - $\text{pred}(v_j) = v_i$

Aufgabe 4.1: A*-Algorithmus

■ Initialisierung:

v_1	v_2	v_3
v_4	v_5	v_6
v_7	v_8	v_9
v_{10}	v_{11}	v_{12}
v_{13}	v_{14}	v_{15}

Aufgabe 4.1: A*-Algorithmus, Initialisierung

■ Initialisierung:

■ $O = \{v_2\}$

■ $f(v_2) = 0 + h(v_2) = \sqrt{4^2 + 1^2} \approx 4.12$

■ $C = \{\}$

v_1	v_2	v_3
v_4	v_5	v_6
v_7	v_8	v_9
v_{10}	v_{11}	v_{12}
v_{13}	v_{14}	v_{15}

Aufgabe 4.1: A*-Algorithmus, Schritt 1

■ Zustand:

■ $O = \{v_2\}$

■ $f(v_2) = 0 + h(v_2) = \sqrt{4^2 + 1^2} \approx 4.12$

■ $C = \{\}$

■ Update:

v_1	v_2	v_3
v_4	v_5	v_6
v_7	v_8	v_9
v_{10}	v_{11}	v_{12}
v_{13}	v_{14}	v_{15}

Aufgabe 4.1: A*-Algorithmus, Schritt 1

■ Zustand:

■ $O = \{v_2\}$

■ $f(v_2) = 0 + h(v_2) = \sqrt{4^2 + 1^2} \approx 4.12$

■ $C = \{\}$

■ Update:

■ Expandiere v_2

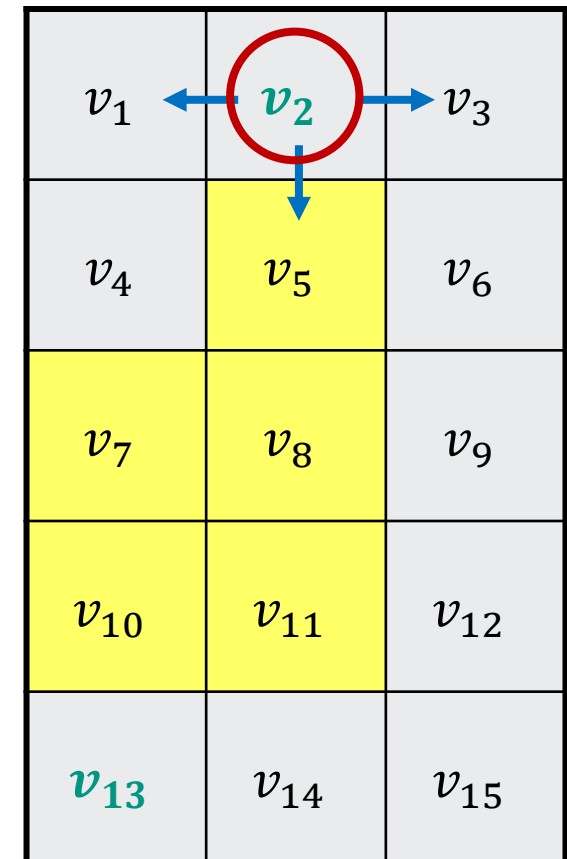
■ $O = \{v_1, v_3, v_5\}$

■ $f(v_1) = 1 + h(v_1) = 1 + 4 = 5$

■ $f(v_3) = 1 + h(v_3) = 1 + \sqrt{4^2 + 2^2} \approx 5.47$

■ $f(v_5) = \cancel{1} + h(v_5) = 4 + \sqrt{3^2 + 1^2} \approx 7.16$

■ $C = \{v_2\}$ 4

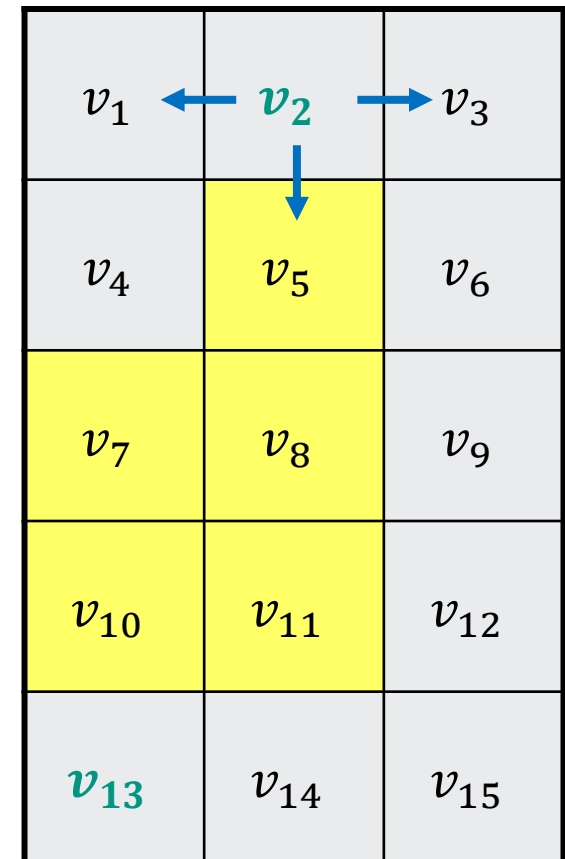


Aufgabe 4.1: A*-Algorithmus, Schritt 2

■ Zustand:

- $O = \{v_1, v_3, v_5\}$
 - $f(v_1) = 5$
 - $f(v_3) \approx 5.47$
 - $f(v_5) \approx 7.16$
- $C = \{v_2\}$

■ Update:



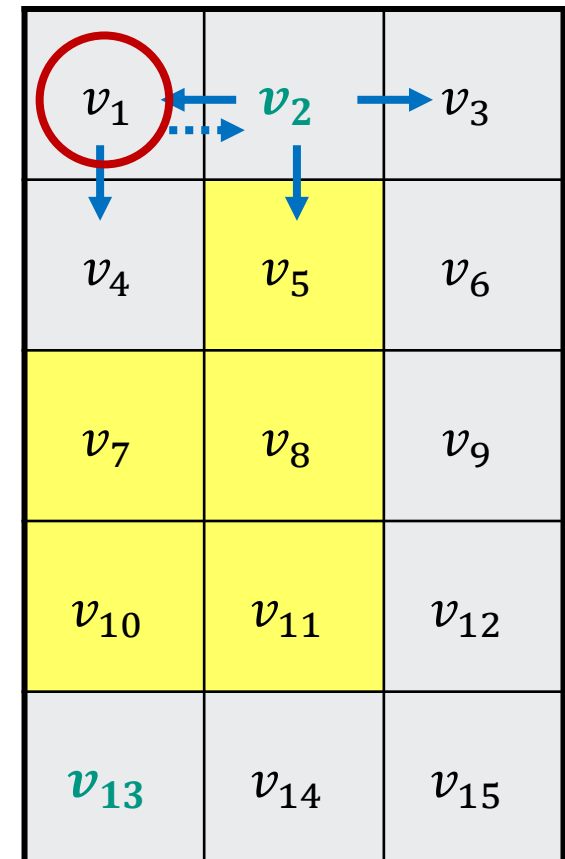
Aufgabe 4.1: A*-Algorithmus, Schritt 2

■ Zustand:

- $O = \{v_1, v_3, v_5\}$
 - $f(v_1) = 5$
 - $f(v_3) \approx 5.47$
 - $f(v_5) \approx 7.16$
- $C = \{v_2\}$

■ Update:

- Expandiere v_1
- $O = \{v_3, v_5, v_4\}$
 - $f(v_4) = 2 + h(v_4) = 2 + 3 = 5$
- $C = \{v_2, v_1\}$

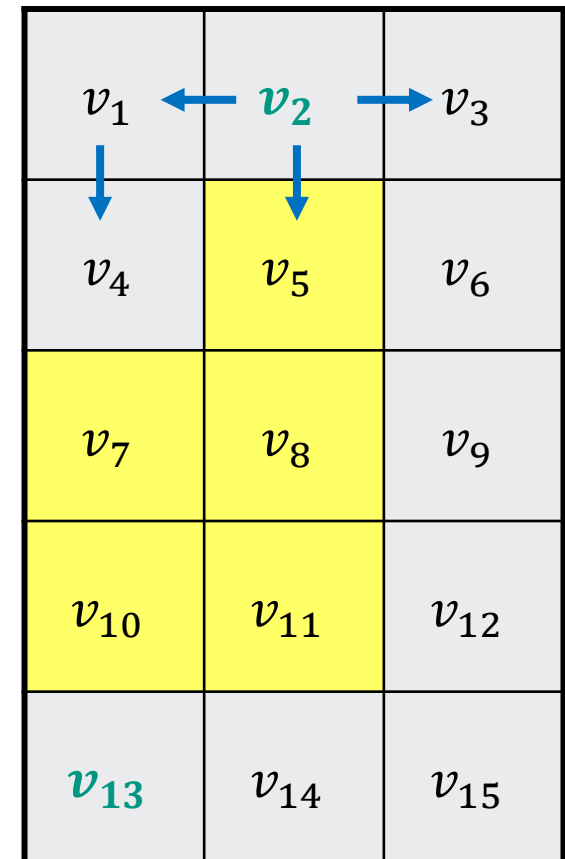


Aufgabe 4.1: A*-Algorithmus, Schritt 3

■ Zustand:

- $O = \{v_3, v_4, v_5\}$
 - $f(v_3) \approx 5.47$
 - $f(v_4) = 5$
 - $f(v_5) \approx 7.16$
- $C = \{v_1, v_2\}$

■ Update:



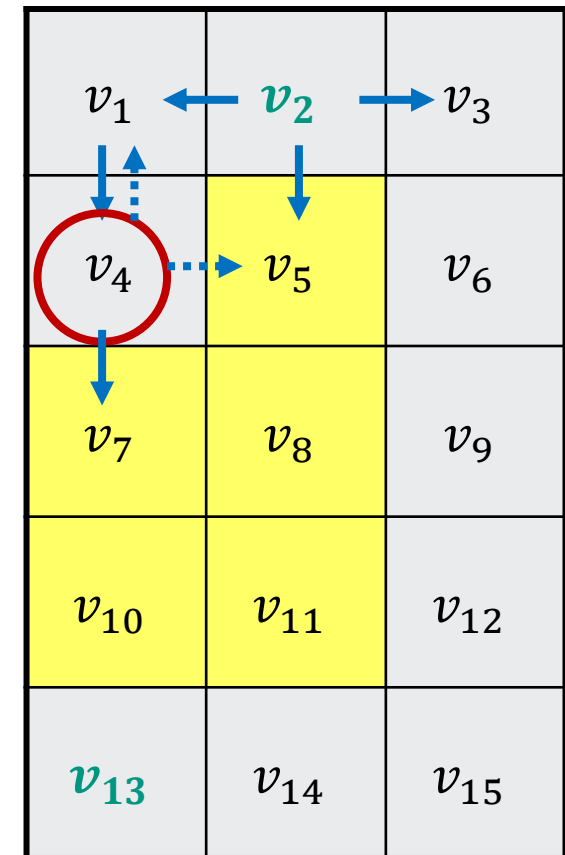
Aufgabe 4.1: A*-Algorithmus, Schritt 3

■ Zustand:

- $O = \{v_3, v_4, v_5\}$
 - $f(v_3) \approx 5.47$
 - $f(v_4) = 5$
 - $f(v_5) \approx 7.16$
- $C = \{v_1, v_2\}$

■ Update:

- Expandiere v_4
- $O = \{v_3, v_5, v_7\}$
 - $g(v_4) + \text{cost}(v_4, v_5) = 2 + 4 = 6 \geq g(v_5) = 4$
 $\Rightarrow$ Kein Update
 - $f(v_7) = 6 + h(v_7) = 6 + 2 = 8$
- $C = \{v_1, v_2, v_4\}$

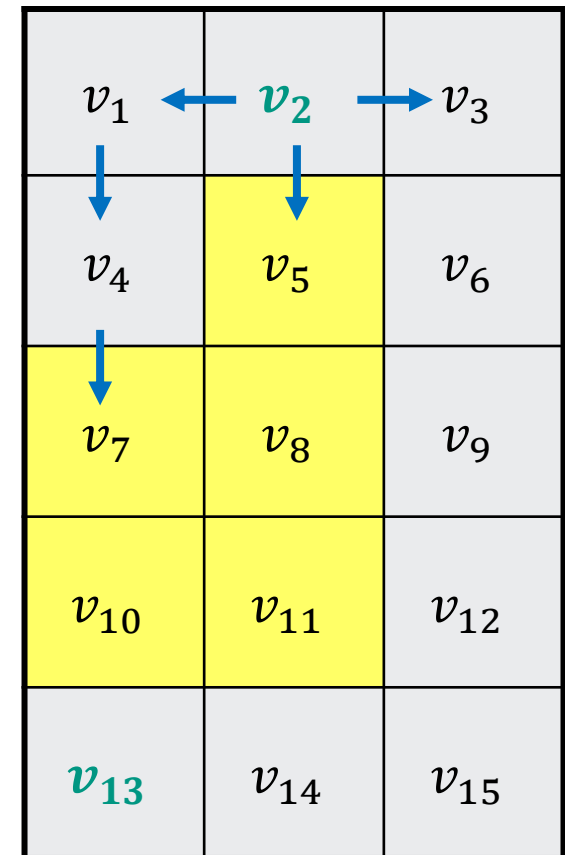


Aufgabe 4.1: A*-Algorithmus, Schritt 4 [optional]

■ Zustand:

- $O = \{v_3, v_5, v_7\}$
 - $f(v_3) \approx 5.47$
 - $f(v_5) \approx 7.16$
 - $f(v_7) = 8$
- $C = \{v_1, v_2, v_4\}$

■ Update:



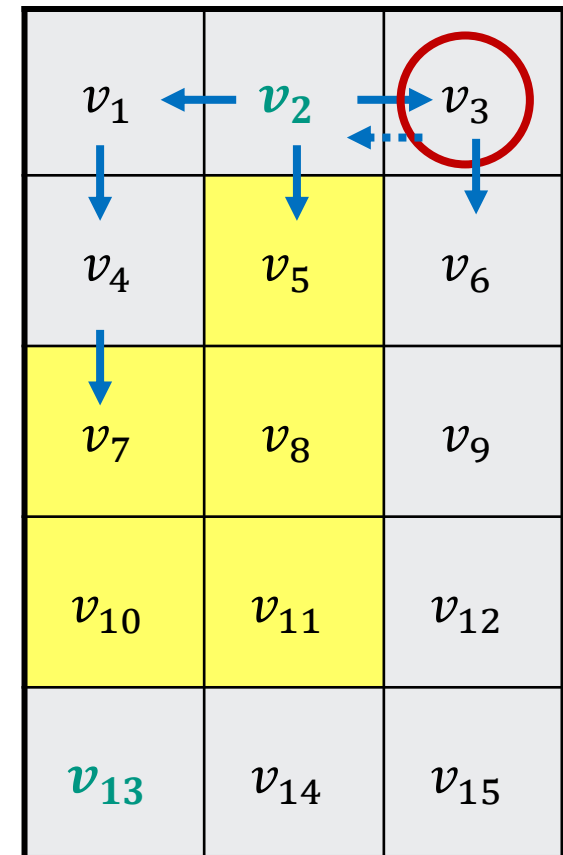
Aufgabe 4.1: A*-Algorithmus, Schritt 4 [optional]

■ Zustand:

- $O = \{v_3, v_5, v_7\}$
 - $f(v_3) \approx 5.47$
 - $f(v_5) \approx 7.16$
 - $f(v_7) = 8$
- $C = \{v_1, v_2, v_4\}$

■ Update:

- Expandiere v_3
- $O = \{v_5, v_7, v_6\}$
 - $f(v_6) = 2 + h(v_6) = 2 + \sqrt{3^2 + 2^2} \approx 5.61$
- $C = \{v_1, v_2, v_4, v_6\}$



Aufgabe 4.2: A*-Algorithmus, Geeignete Heuristik

- Aus der Aufgabenstellung:
 - Nur horizontale und vertikale Bewegungen erlaubt
 - Kosten:
 - Betreten einer grauen Zelle: 1
 - Betreten einer gelben Zelle: 4
 - Heuristik h : Euklidische Distanz zu v_{13}

- Warum ist die euklidische Distanz eine geeignete Heuristik?

v_1	v_2	v_3
v_4	v_5	v_6
v_7	v_8	v_9
v_{10}	v_{11}	v_{12}
v_{13}	v_{14}	v_{15}

Aufgabe 4.2: A*-Algorithmus, Geeignete Heuristik

- Aus der Aufgabenstellung:
 - Nur horizontale und vertikale Bewegungen erlaubt
 - Kosten:
 - Betreten einer grauen Zelle: 1
 - Betreten einer gelben Zelle: 4
 - Heuristik h : Euklidische Distanz zu v_{13}
- Warum ist die euklidische Distanz eine geeignete Heuristik?
 - Heuristik muss **zulässig** sein
 - D. h., sie überschätzt die Kosten nicht

v_1	v_2	v_3
v_4	v_5	v_6
v_7	v_8	v_9
v_{10}	v_{11}	v_{12}
v_{13}	v_{14}	v_{15}

Aufgabe 4.2: A*-Algorithmus, Geeignete Heuristik

- Aus der Aufgabenstellung:
 - Nur horizontale und vertikale Bewegungen erlaubt
 - Kosten:
 - Betreten einer grauen Zelle: 1
 - Betreten einer gelben Zelle: 4
 - Heuristik h : Euklidische Distanz zu v_{13}
- Warum ist die euklidische Distanz eine geeignete Heuristik?
 - Heuristik muss **zulässig** sein
 - D. h., sie überschätzt die Kosten nicht
 - Euklidische Distanz ist zulässig, da:
 - Keine Knoten mit negativen Kosten
 - Nur Bewegungen zu horizontalen und vertikalen benachbarten Zellen möglich

v_1	v_2	v_3
v_4	v_5	v_6
v_7	v_8	v_9
v_{10}	v_{11}	v_{12}
v_{13}	v_{14}	v_{15}

Aufgabe 4.3: A*-Algorithmus, Lösung

- Wann findet der A*-Algorithmus eine Lösung?
 - a) Wenn der Zielknoten expandiert wird
 - b) Wenn der Zielknoten zum Open Set hinzugefügt wird

- Begründen Sie die Antwort.

Aufgabe 4.3: A*-Algorithmus, Lösung

■ Algorithmus

Solange $O \neq \emptyset$

- Bestimme den zu erweiternden Knoten
 - Finde $v_i \in O$ mit minimalem $f(v_i) = g(v_i) + h(v_i)$
- Wenn $v_i = v_{\text{ziel}}$
Lösung gefunden: Traversiere Vorgänger von v_i bis v_{start} erreicht ist.
- $O.\text{remove}(v_i)$
- $C.\text{add}(v_i)$
- **Update** für alle Nachfolger v_j von v_i durchführen
 - Wenn $v_j \in C$, dann überspringe v_j
 - Wenn $v_j \notin O$, dann $O.\text{add}(v_j)$
 - Wenn $g(v_i) + \text{cost}(v_i, v_j) < g(v_j)$
 - $g(v_j) = g(v_i) + \text{cost}(v_i, v_j)$
 - $h(v_j) = \text{heuristic}(v_j, v_{\text{ziel}})$
 - $\text{pred}(v_j) = v_i$

Aufgabe 4.3: A*-Algorithmus, Lösung

■ Algorithmus

Solange $O \neq \emptyset$

- Bestimme den zu erweiternden Knoten

- Finde $v_i \in O$ mit minimalem $f(v_i) = g(v_i) + h(v_i)$

- (a) ■ Wenn $v_i = v_{\text{ziel}}$

Lösung gefunden: Traversiere Vorgänger von v_i bis v_{start} erreicht ist.

- $O.\text{remove}(v_i)$

- $C.\text{add}(v_i)$

- **Update** für alle Nachfolger v_j von v_i durchführen

- Wenn $v_j \in C$, dann überspringe v_j
- Wenn $v_j \notin O$, dann $O.\text{add}(v_j)$
- Wenn $g(v_i) + \text{cost}(v_i, v_j) < g(v_j)$
 - $g(v_j) = g(v_i) + \text{cost}(v_i, v_j)$
 - $h(v_j) = \text{heuristic}(v_j, v_{\text{ziel}})$
 - $\text{pred}(v_j) = v_i$

(b)

Aufgabe 4.3: A*-Algorithmus, Lösung

- Wann findet der A*-Algorithmus eine Lösung?
 - a) **Wenn der Zielknoten expandiert wird**
 - b) Wenn der Zielknoten zum Open Set hinzugefügt wird

- Begründen Sie die Antwort.

Aufgabe 4.3: A*-Algorithmus, Lösung

- Wann findet der A*-Algorithmus eine Lösung?
 - a) **Wenn der Zielknoten expandiert wird**
 - b) Wenn der Zielknoten zum Open Set hinzugefügt wird

- Begründen Sie die Antwort.
 - Bei Option (b), dem Hinzufügen zum Open Set:
 - Algorithmus kann noch nicht terminieren
 - Es wurde nur **ein** Weg zum Ziel gefunden
 - Es kann noch **kürzere** Wege über andere Wege zum Ziel geben
 - Bei Option (a), dem Expandieren des Zielknotens:
 - Es kann **keinen kürzeren** Weg zum Ziel mehr geben
 - [Sofern die Heuristik **zulässig** ist]

Aufgabe 4: A*-Algorithmus, Bonus

Bonusfragen:

- Ist die euklidische Distanz eine zulässige Heuristik, wenn **diagonale Bewegungen** mit gleichen Kosten erlaubt sind?

- Ist die **Manhattan-Distanz** eine zulässige Heuristik? Warum?

$$\text{Eukl.} : \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{Manh.} : |x| + |y|$$

- Wenn ja: Ist die Manhattan-Distanz eine **bessere oder schlechtere Heuristik** als die euklidische Distanz für die ursprüngliche Aufgabenstellung?

v_1	v_2	v_3
v_4	v_5	v_6
v_7	v_8	v_9
v_{10}	v_{11}	v_{12}
v_{13}	v_{14}	v_{15}

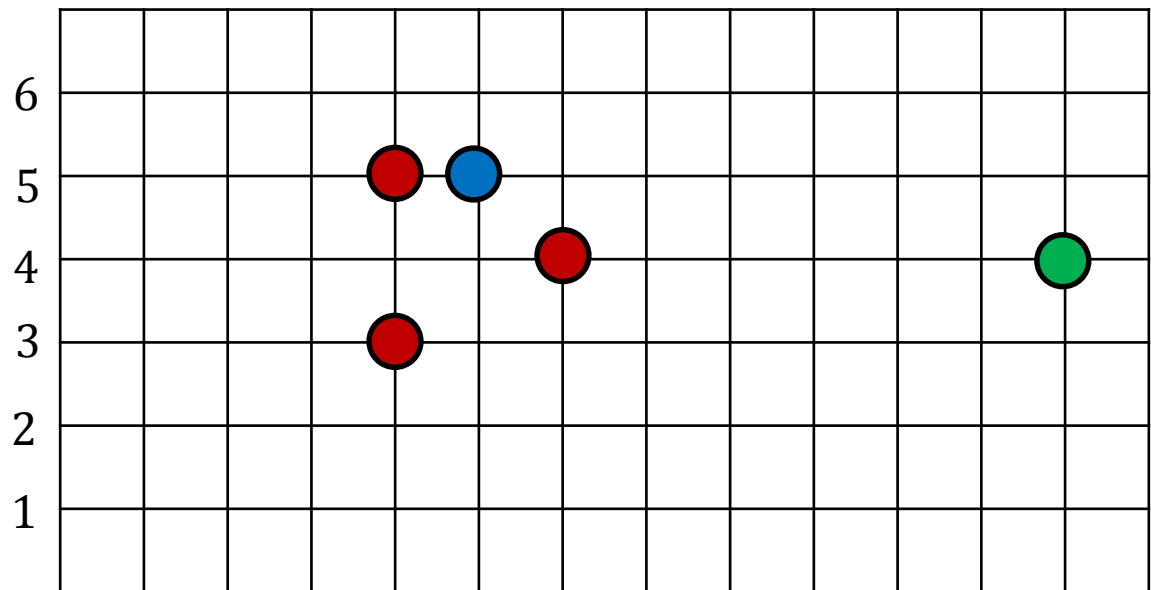
Aufgabe 5: Potentialfelder

- Roboter: $\mathbf{q}_R$
- Hindernisse:
 $\mathbf{q}_{abs,1}, \mathbf{q}_{abs,2}, \mathbf{q}_{abs,3}$
- Ziel: $\mathbf{q}_{ziel}$

1. Welche Potentiale wirken mit $\rho_0 = 5$?

2. Bestimmen Sie $U(\mathbf{q}_R)$ mit $k = 1, v = 1$ und linearem Zielpotential.

3. In welche Richtung bewegt sich der Roboter?



● $\mathbf{q}_R = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

● $\mathbf{q}_{abs,1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{abs,2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{abs,3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

● $\mathbf{q}_{ziel} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$

Potentialfelder (2)

■ Abstoßendes Potenzial

- Hindernisse erzeugen ein abstoßendes Potential
- In großem Abstand zu Hindernissen ($> \rho_0$) soll der Roboter nicht beeinflusst werden

■ Beispiel:

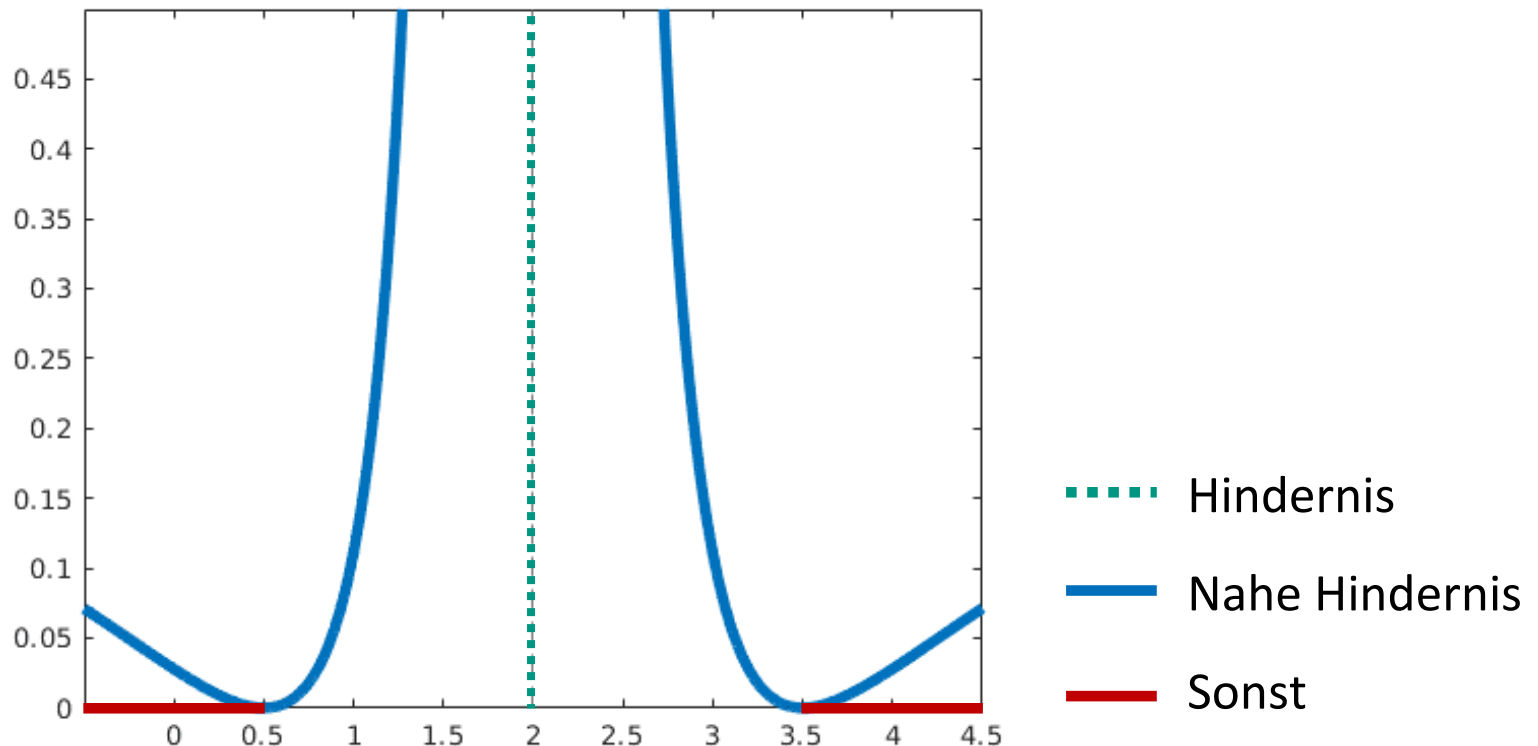
$$U_{ab}(\mathbf{q}) = \begin{cases} \frac{1}{2} v \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}_{obs})} - \frac{1}{\rho_0} \right)^2 & \text{für } \rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}_{obs}) \leq \rho_0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}_{obs}) = \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_{obs}\|$ ist die minimale Distanz zwischen Roboter und Hindernis

$$F_{ab} = -\nabla U_{ab} = v \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}_{obs})} - \frac{1}{\rho_0} \right) \cdot \frac{1}{\rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}_{obs})^2} \cdot \frac{\mathbf{q} - \mathbf{q}_{obs}}{\rho(\mathbf{q}, \mathbf{q}_{obs})}$$

Potentialfeld: Hindernis-Beispiel

$$U_{ab}(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{\|x - 2\|} - \frac{1}{1.5} \right)^2 & \text{für } \|x - 2\| \leq 1.5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Aufgabe 5.1: Abstoßende Potentiale

- $\mathbf{q}_R = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{q}_{abs,1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{abs,2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{abs,3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $\rho_0 = 5$

Aufgabe 5.1: Abstoßende Potentiale

- $\mathbf{q}_R = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{q}_{abs,1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{abs,2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{abs,3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $\rho_0 = 5$

$$\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ab,1}\| = \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \approx 2.2$$

$$\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ab,2}\| = \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \approx 1.4$$

$$\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ab,3}\| = \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

Aufgabe 5.1: Abstoßende Potentiale

- $\mathbf{q}_R = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

- $\mathbf{q}_{abs,1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{abs,2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{abs,3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

- $\rho_0 = 5$

$$\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ab,1}\| \approx 2.2$$

$$\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ab,2}\| \approx 1.4$$

$$\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ab,3}\| = 1$$

Aufgabe 5.1: Abstoßende Potentiale

- $\mathbf{q}_R = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $\mathbf{q}_{abs,1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{abs,2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{abs,3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $\rho_0 = 5$

$$\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ab,1}\| \approx 2.2 < \rho_0$$

$$\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ab,2}\| \approx 1.4 < \rho_0$$

$$\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ab,3}\| = 1 < \rho_0$$

➔ Alle drei abstoßenden Potentiale wirken auf den Roboter.

Potentialfelder (3)

■ Anziehendes Potential

- Es soll möglichst nur ein Minimum in $\mathbf{q}_{ziel}$ geben

■ Lineare Funktion der Distanz zum Ziel:

$$U_{an}(\mathbf{q}) = k \cdot \|\mathbf{q} - \mathbf{q}_{ziel}\|$$

$$F_{an}(\mathbf{q}) = -\nabla U_{an}(\mathbf{q}) = -k \cdot \frac{\mathbf{q} - \mathbf{q}_{ziel}}{\|\mathbf{q} - \mathbf{q}_{ziel}\|}$$

- Für kleine Distanzen wird die Kraft sehr groß

Aufgabe 5.2: Potential-Berechnung

$$U(\mathbf{q}_R) = U_{an}(\mathbf{q}_R) + \sum_{i=1}^3 U_{ab,i}(\mathbf{q}_R)$$

mit $k = 1, v = 1, \rho_0 = 5$

Aufgabe 5.2: Potential-Berechnung

$$U(\mathbf{q}_R) = U_{an}(\mathbf{q}_R) + \sum_{i=1}^3 U_{ab,i}(\mathbf{q}_R)$$

$$\text{mit } k = 1, v = 1, \rho_0 = 5$$

$$U_{an}(\mathbf{q}_R) = k \cdot \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}\| = \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}\|$$

Aufgabe 5.2: Potential-Berechnung

$$U(\mathbf{q}_R) = U_{an}(\mathbf{q}_R) + \sum_{i=1}^3 U_{ab,i}(\mathbf{q}_R)$$

$$\text{mit } k = 1, v = 1, \rho_0 = 5$$

$$U_{an}(\mathbf{q}_R) = k \cdot \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}\| = \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}\|$$

$$U_{ab,i}(\mathbf{q}_R) = \frac{1}{2} v \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|} - \frac{1}{\rho_0} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|} - \frac{1}{\rho_0} \right)^2$$

Aufgabe 5.2: Potential-Berechnung

$$U(\mathbf{q}_R) = U_{an}(\mathbf{q}_R) + \sum_{i=1}^3 U_{ab,i}(\mathbf{q}_R)$$

$$\text{mit } k = 1, v = 1, \rho_0 = 5$$

$$U_{an}(\mathbf{q}_R) = k \cdot \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}\| = \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}\|$$

$$U_{ab,i}(\mathbf{q}_R) = \frac{1}{2} v \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|} - \frac{1}{\rho_0} \right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|} - \frac{1}{\rho_0} \right)^2$$

$$U(\mathbf{q}_R) = \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}\| + \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|} - \frac{1}{\rho_0} \right)^2$$

Aufgabe 5.3: Richtung des Roboters

Richtung: Welche Kraft wirkt auf den Roboter?

$$\begin{aligned} F(\mathbf{q}_R) &= -\nabla U(\mathbf{q}_R) \\ &= -\nabla \left(U_{an}(\mathbf{q}_R) + \sum_{i=1}^3 U_{ab,i}(\mathbf{q}_R) \right) \end{aligned}$$

Aufgabe 5.3: Richtung des Roboters

Richtung: Welche Kraft wirkt auf den Roboter?

$$\begin{aligned} F(\mathbf{q}_R) &= -\nabla U(\mathbf{q}_R) \\ &= -\nabla \left(U_{an}(\mathbf{q}_R) + \sum_{i=1}^3 U_{ab,i}(\mathbf{q}_R) \right) \\ &= -\nabla U_{an}(\mathbf{q}_R) + \sum_{i=1}^3 -\nabla U_{ab,i}(\mathbf{q}_R) \end{aligned}$$

Aufgabe 5.3: Richtung des Roboters

Richtung: Welche Kraft wirkt auf den Roboter?

$$\begin{aligned}
 F(\mathbf{q}_R) &= -\nabla U(\mathbf{q}_R) \\
 &= -\nabla \left(U_{an}(\mathbf{q}_R) + \sum_{i=1}^3 U_{ab,i}(\mathbf{q}_R) \right) \\
 &= -\nabla U_{an}(\mathbf{q}_R) + \sum_{i=1}^3 -\nabla U_{ab,i}(\mathbf{q}_R) \\
 &= -\frac{\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}\|} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|} - \frac{1}{\rho_0} \right) \cdot \frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|^2} \cdot \frac{\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|}
 \end{aligned}$$

Aufgabe 5.3: Richtung des Roboters

$$F(\mathbf{q}_R) = -\frac{\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{ziel}}}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{ziel}}\|} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},i}\|} - \frac{1}{\rho_0} \right) \cdot \frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},i}\|^2} \cdot \frac{\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},i}}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},i}\|}$$

$$\mathbf{q}_R = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{\text{abs},1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{\text{abs},2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{\text{abs},3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{\text{ziel}} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}, \rho_0 = 5$$

Aufgabe 5.3: Richtung des Roboters

$$F(\mathbf{q}_R) = -\frac{\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{ziel}}}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{ziel}}\|} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},i}\|} - \frac{1}{\rho_0} \right) \cdot \frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},i}\|^2} \cdot \frac{\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},i}}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},i}\|}$$

$$\mathbf{q}_R = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{\text{abs},1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{\text{abs},2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{\text{abs},3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{\text{ziel}} = \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}, \rho_0 = 5$$

$$\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{ziel}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{ziel}}\| = 7$$

$$\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},1}\| = \sqrt{5}$$

$$\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},2}\| = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},3}\| = 1$$

Aufgabe 5.3: Richtung des Roboters

$$F(\mathbf{q}_R) = -\frac{\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}\|} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|} - \frac{1}{5} \right) \cdot \frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|^2} \cdot \frac{\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|}$$

$$\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}\| = 7, \mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,1}\| = \sqrt{5}$$

$$\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,2}\| = \sqrt{2}, \mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,3}\| = 1$$

$$F(\mathbf{q}_R) =$$

Aufgabe 5.3: Richtung des Roboters

$$F(\mathbf{q}_R) = -\frac{\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}\|} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|} - \frac{1}{5} \right) \cdot \frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|^2} \cdot \frac{\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|}$$

$$\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}\| = 7, \mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,1}\| = \sqrt{5}$$

$$\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,2}\| = \sqrt{2}, \mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,3}\| = 1$$

$$F(\mathbf{q}_R) = -\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} +$$

Aufgabe 5.3: Richtung des Roboters

$$F(\mathbf{q}_R) = -\frac{\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}\|} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|} - \frac{1}{5} \right) \cdot \frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|^2} \cdot \frac{\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|}$$

$$\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}\| = 7, \mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,1}\| = \sqrt{5}$$

$$\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,2}\| = \sqrt{2}, \mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,3}\| = 1$$

$$F(\mathbf{q}_R) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{5} \right) \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.3: Richtung des Roboters

$$F(\mathbf{q}_R) = -\frac{\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{ziel}}}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{ziel}}\|} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},i}\|} - \frac{1}{5} \right) \cdot \frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},i}\|^2} \cdot \frac{\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},i}}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},i}\|}$$

$$\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{ziel}} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{ziel}}\| = 7, \mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},1}\| = \sqrt{5}$$

$$\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},2}\| = \sqrt{2}, \mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},3}\| = 1$$

$$F(\mathbf{q}_R) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5-\sqrt{5}}{125} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} +$$

Aufgabe 5.3: Richtung des Roboters

$$F(\mathbf{q}_R) = -\frac{\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{ziel}}}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{ziel}}\|} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},i}\|} - \frac{1}{5} \right) \cdot \frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},i}\|^2} \cdot \frac{\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},i}}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},i}\|}$$

$$\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{ziel}} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{ziel}}\| = 7, \mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},1}\| = \sqrt{5}$$

$$\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},2}\| = \sqrt{2}, \mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},3}\| = 1$$

$$F(\mathbf{q}_R) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5-\sqrt{5}}{125} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{5} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.3: Richtung des Roboters

$$F(\mathbf{q}_R) = -\frac{\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}\|} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|} - \frac{1}{5} \right) \cdot \frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|^2} \cdot \frac{\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|}$$

$$\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}\| = 7, \mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,1}\| = \sqrt{5}$$

$$\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,2}\| = \sqrt{2}, \mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,3}\| = 1$$

$$F(\mathbf{q}_R) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5-\sqrt{5}}{125} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{10-2\sqrt{2}}{40} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} +$$

Aufgabe 5.3: Richtung des Roboters

$$F(\mathbf{q}_R) = -\frac{\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}\|} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|} - \frac{1}{5} \right) \cdot \frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|^2} \cdot \frac{\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|}$$

$$\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}\| = 7, \mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,1}\| = \sqrt{5}$$

$$\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,2}\| = \sqrt{2}, \mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,3}\| = 1$$

$$F(\mathbf{q}_R) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5-\sqrt{5}}{125} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{10-2\sqrt{2}}{40} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{5} \right) \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.3: Richtung des Roboters

$$F(\mathbf{q}_R) = -\frac{\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}\|} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|} - \frac{1}{5} \right) \cdot \frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|^2} \cdot \frac{\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,i}\|}$$

$$\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{ziel}\| = 7, \mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,1}\| = \sqrt{5}$$

$$\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,2}\| = \sqrt{2}, \mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{abs,3}\| = 1$$

$$F(\mathbf{q}_R) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5-\sqrt{5}}{125} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{10-2\sqrt{2}}{40} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5.3: Richtung des Roboters

$$F(\mathbf{q}_R) = -\frac{\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{ziel}}}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{ziel}}\|} + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},i}\|} - \frac{1}{5} \right) \cdot \frac{1}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},i}\|^2} \cdot \frac{\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},i}}{\|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},i}\|}$$

$$\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{ziel}} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{ziel}}\| = 7, \mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},1}\| = \sqrt{5}$$

$$\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},2}\| = \sqrt{2}, \mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \|\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_{\text{abs},3}\| = 1$$

$$F(\mathbf{q}_R) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5-\sqrt{5}}{125} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{10-2\sqrt{2}}{40} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{4}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.643 \\ 0.224 \end{pmatrix}$$

$$\text{Richtung: } \frac{F(\mathbf{q}_R)}{0.224} \approx \begin{pmatrix} 7.3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

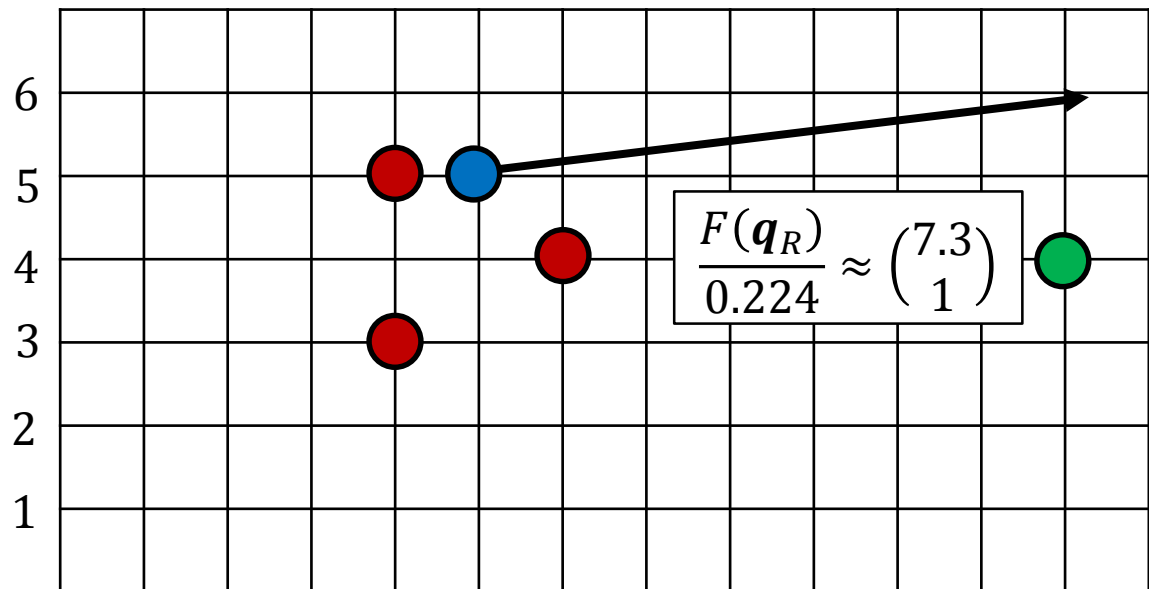
Aufgabe 5.3: Richtung des Roboters

- Roboter: $\mathbf{q}_R$
- Hindernisse: $\mathbf{q}_{abs,1}, \mathbf{q}_{abs,2}, \mathbf{q}_{abs,3}$
- Ziel: $\mathbf{q}_{ziel}$

1. Welche Potentiale wirken mit $\rho_0 = 5$?

2. Bestimmen Sie $U(\mathbf{q}_R)$ mit $k = 1, v = 1$ und linearem Zielpotential.

3. In welche Richtung bewegt sich der Roboter?



● $\mathbf{q}_R = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$

● $\mathbf{q}_{abs,1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{abs,2} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{q}_{abs,3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

● $\mathbf{q}_{ziel} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix}$

Hinweis: Letzte Vorlesung im Jahr fällt aus

- Die Vorlesung am

Donnerstag, den 21.12.2017

fällt aus.

- Die erste Vorlesung im neuen Jahr findet am

Montag, den 08.01.2018

statt.